概率论习题汇编

目录

第一章　随机事件的概率

1. A, B, C 为任意三个随机事件, 则事件 $(A-B)\cup(B-C)=$ (**D**) .

(A) $A-C$　**(B)** $A\cup(B-C)$　**(C)** $(A\cup B)-C$　**(D)** $(A\cup B)-BC$

2. 对于任意两个事件 A 与 B, 则 $P(A-B)=$ (**C**) .

(A) $P(A)-P(B)$　**(B)** $\overline{P(A)-P(B)}+P(AB)$

(C) $P(A)-P(AB)$　**(D)** $P(A)+P(\overline{B})-P(A\overline{B})$

3. 某种动物活到 25 岁以上的概率为 0.8, 活到 30 岁以上的概率为 0.4, 则现年 25 岁的这种动物活到 30 岁以上的概率是 (**D**) .

(A) 0.76　**(B)** 0.4　**(C)** 0.32　**(D)** 0.5

4. 对于任意两个事件 A, B, 必有 $P(A-B)=$ (**D**) .

(A) $P(A)–P(B)$　**(B)** $P(A)–P(B)+P(AB)$

(C) $P(A)+P(B)$　**(D)** $P(A)–P(AB)$

5. 设 A, B 是两个互相对立的事件, 且 $P(A)>0$, $P(B)>0$, 则下列结论正确的是 (**C**) .

(A) $P(B\mid A)>0$　**(B)** $P(A\mid B)=P(A)$

(C) $P(A\mid B)=0$　**(D)** $P(AB)=P(A)P(B)$

6. 设 A, B 为任意两个事件, 则下列关系式成立的是 (**C**) .

(A) $(A\cup B)-B=A$　**(B)** $(A\cup B)-B\supset A$　**(C)** $(A\cup B)-B\subset A$　**(D)** $(A\cup B)\cup B=A$

7. 四封信等可能投入三个邮筒, 在已知钱两封信放入不同邮筒的条件下, 则恰有三封信放入同一个邮筒的概率为__2/9__.

8. 两射手彼此独立地向同一目标射击, 设甲击中的概率为 0.8, 乙击中的概率为 0.7, 则目标被击中的概率为__0.94__.

9. 已知事件 A,B 满足 $P(A\cap B)=P(\overline{A}\cap\overline{B})$, 若 $P(A)=0.2$, 则 $P(B)=$__0.8__.

10. 设 A,B 为两事件, 且 $P(A)=P(B)=\dfrac{1}{3}$, $P(A|B)=\dfrac{1}{6}$, 则 $P(\overline{A}|\overline{B})=$__7/12__.

11. "随机事件 A 、B 、C 中恰有一个发生" 可表示为 __$A\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\overline{B}C$__.

12. 袋中有 50 个乒乓球, 其中 20 个是黄球, 30 个是白球, 两人依次从袋中各取一球, 取后不放回, 则第二个人取到黄球的概率是__2/5__.

13. 设 A、B 为两个事件, 且 $P(B)=0.3$, $P(A\cup B)=0.6$, 则 $P(A\cap\overline{B})=$__0.3__.

14. 将两信息分别编码为 X 和 Y 后传出去, 接收站接收时, X 被误收作 Y 的概率为 0.04, 而 Y 被误收作 X 的概率是 0.03, 信息 X 与信息 Y 传送的频繁程度之比为 $1:2$, 若接收站收到信息 X, 求原发信息也是 X 的概率.

参考答案: $\dfrac{16}{17}$.

15. 已知 5% 的男人和 0.25% 的女人是色盲, 假设男人女人各占一半. 现随机地挑选一人, 求:

(1)此人恰是色盲的概率是多少?

(2)若随机挑选一人, 此人不是色盲, 问其是男人的概率多大?

参考答案: 0.02625, 0.4878.

16. 试卷中有一道选择题, 共有 4 个答案可供选择, 其中只有 1 个答案是正确的. 任一考生如果会解这道题, 则一定能选出正确答案; 如果不会解这道题, 则不妨任选 1 个答案. 设考生会解这道题的概率是 0.8.

(1)求考生选出正确答案的概率;

(2)已知某考生所选答案是正确的, 求他确实会解这道题的概率.

参考答案: 0.85, 0.9412.

17. 设第一个盒子中装有 3 只蓝球, 2 只绿球, 2 只白球; 第二个盒子中装有 2 只蓝球, 3 只绿球, 4 只白球, 独立地分别在两个盒子中各取一只球.

(1)求至少有 1 只蓝球的概率;

(2)求有 1 只蓝球 1 只白球的概率.

参考答案：$\frac{5}{9}$; $\frac{16}{63}$.

18. 某公司有甲、乙、丙三个车间,生产同一种型号的产品,每个车间的产量分别占公司的 25%, 35%, 40%, 各车间的次品率分别为 5%, 4%, 2%, 已知从这批产品中随机地取出的一件是不合格,问这件产品由甲厂生产的概率？

参考答案：$\frac{25}{69}$.

第二章　一维随机变量及其分布

1. 设 $f_1(x)$ 为标准正态分布的概率密度, $f_2(x)$ 为 $[-1,3]$ 上均匀分布的概率密度, 若

$$f(x)=\begin{cases} a f_1(x), & x\le 0 \\ b f_2(x), & x>0 \end{cases} \quad (a>0, b>0)$$

为概率密度, 则 a,b 应满足 (**A**).

(A) $2a+3b=4$ **(B)** $3a+2b=4$ **(C)** $a+b=1$ **(D)** $a+b=2$

2. 设随机变量的概率密度为 $f_X(x)$, 则 $Y=3X-1$ 的概率密度为 $f_Y(y)=$ (**A**).

(A) $\frac{1}{3}f_X(\frac{y+1}{3})$ **(B)** $3f_X(\frac{y+1}{3})$ **(C)** $\frac{1}{3}f_X[3(y+1)]$ **(D)** $3f_X(\frac{y-1}{3})$

3. 下列函数中可作为随机变量分布函数的是 (**C**).

(A) $F_1(x)=\begin{cases} 1, & 0\le x\le 1; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$

(B) $F_2(x)=\begin{cases} -1, & x<0; \\ x, & 0\le x<1; \\ 1, & x\ge 1. \end{cases}$

(C) $F_3(x)=\begin{cases} 0, & x<0; \\ x, & 0\le x<1; \\ 1, & x\ge 1. \end{cases}$

(D) $F_4(x)=\begin{cases} 0, & 0<0; \\ x, & 0\le x<1; \\ 2, & x\ge 1. \end{cases}$

4. 设 $F(x)$ 和 $f(x)$ 分别为某随机变量的分布函数和概率密度, 则必有 (**C**).

(A) $f(x)$ 单调不减

(B) $\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\mathrm{d}x=1$

(C) $F(-\infty)=0$

(D) $F(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$

5. 设 $F(x)$ 是连续型随机变量 X 的分布函数, 则 $F(x)$ 在其定义域内一定是 (**D**).

(A) 非阶梯型间断函数

(B) 可导函数

(C) 阶梯函数

(D) 连续但不一定可导的函数

6. 设随机变量 X 服从参数 $\lambda=\frac{1}{9}$ 的指数分布, 则 $P\{3<X<9\}=$ (**A**).

(A) $\frac{1}{\sqrt[3]{e}}-\frac{1}{e}$ **(B)** $\frac{1}{9}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{e}}-\frac{1}{e}\right)$ **(C)** $\int_3^9 e^{-\frac{x}{9}}\,dx$ **(D)** $F\left(\frac{9}{9}\right)-F\left(\frac{3}{9}\right)$

7. 设随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases} cx^4, & 0<x<1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$，则常数 $c=$ (**D**)．

(A) $\frac{1}{5}$　　(B) $\frac{1}{4}$　　(C) 4　　(D) 5

8. 设随机变量 X 的概率分布为 $P\{X=k\}=\theta(1-\theta)^{k-1}(k=1,2,\dots)$，其中 $0<\theta<1$，若 $P\{X\le 2\}=\frac{5}{9}$，则 $P\{X=3\}=$ __4/27__．

9. 设连续型随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases} kx+1, & 0<x<2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$，则 $k=$ __−0.5__．

10. 设随机变量 X 服从区间 $[2,\theta]$ 上的均匀分布，且概率密度

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{4}, & 2\le x\le\theta \\ 0 & \text{其他} \end{cases},$$

则 $\theta=$ __6__．

11. 设随机变量 X 的概率密度函数为：$f_X(x)=\begin{cases} \frac{|x|}{4}, & -2<x<2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$，

(1)求 X 的分布函数 $F_X(x)$；

(2)令 $Y=X^2$，求 Y 的概率密度 $f_Y(y)$．

参考答案：X 的分布函数为

$$F_X(x)=\begin{cases} 0, & x\le -2; \\ \left(4-x^2\right)/8, & -2<x<0; \\ \left(x^2+4\right)/8, & 0\le x<2; \\ 1, & x\ge 2; \end{cases};$$

Y 的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases} 1/4, & 0<y<4; \\ 0, & \text{其他}; \end{cases}.$$

12. 设连续型随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ Ax^2 & 0\le x<1 \\ 1 & x\ge 1 \end{cases}$，试求：

(1)系数 A；

(2)X 的概率密度；

(3)$P(0.3 < X \le 0.7)$；

(4)$Y = X^2$ 的概率密度.

参考答案：$A=1$, X 的概率密度为

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}2x & 0<x<1\\ 0 & 其他\end{cases};$$

$P(0.3<X\le 0.7)=0.4$; Y 的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}1 & 0<y<1\\ 0 & 其他\end{cases}.$$

13. 设随机变量 X 服从 $[0,1]$ 上的均匀分布，求随机变量函数 $Y=\mathrm{e}^X$ 的概率密度 $f_Y(y)$.

参考答案：随机变量 Y 的概率密度为 $f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{y}, & 1<y<\mathrm{e};\\ 0, & 其他.\end{cases}$

14. 某次考试成绩 X（单位：分）服从正态分布 $N(75,15^2)$.

(1)求此次考试的及格率 $P\{X\ge 60\}$ 和优秀率 $P\{X\ge 90\}$；

(2)考试成绩至少高于多少分能排名前 33.33%？

(附：$\Phi(0.33)=0.6293$, $\Phi(0.431)=0.6667$, $\Phi(1)=0.8413$, $\Phi(2.18)=0.9854$)

参考答案：$P\{X\ge 60\}=\Phi(1)=0.8413$, $P\{X\ge 90\}=0.1587$；成绩至少高于 81 分能排名前 33.33%.

15. 设随机变量 X 服从标准正态分布，即 X 的概率密度为 $\varphi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$，求随机变量函数 $Y=\mathrm{e}^X$ 的概率密度.

参考答案：随机变量 Y 的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{y\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(\ln y)^2}{2}} & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}$$

16. 设随机变量 X 服从标准正态分布，即 X 的概率密度为 $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$，求随机变量函数 $Y=2|X|$ 的概率密度.

参考答案：随机变量 Y 的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{8}}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$$

17. 设随机变量 X 的概率密度

$$f(x)=\begin{cases}Ax+1, & 0\le x\le 2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

试求：

(1) 常数 A；

(2) $P\{1.5<X<2.5\}$.

参考答案：$A=-\frac{1}{2}$; $P\{1.5<X\le 2.5\}=\frac{1}{16}$.

18. 设随机变量 X 服从标准正态分布，即 X 的概率密度为 $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$，求 $Y=e^X$ 的概率密度.

参考答案：随机变量 Y 的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2p}y}e^{-\frac{\ln^2 y}{2}}, & y>0;\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

19. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且服从同一分布. 试证明：

$$P\{a<\min(X,Y)\le b\}=[P\{X>a\}]^2-[P\{X>b\}]^2$$

参考答案：略.

第三章　多维随机变量及其分布

1. 设二维随机变量(X,Y)的概率密度为$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{4}, & 0<x<2, 0<y<2;\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ 则$P\{0<X<1, 0<Y<1\}=$ (**A**) .

(A) $\dfrac{1}{4}$　　(B) $\dfrac{1}{2}$　　(C) $\dfrac{3}{4}$　　(D) 1

2. 设二维随机变量(X,Y)服从区域$D: x^2+y^2\le 1$上的均匀分布，则(X,Y)的概率密度函数为 (**D**) .

(A) $f(x,y)=1$　　(B) $f(x,y)=\dfrac{1}{\pi}$

(C) $f(x,y)=\begin{cases}1, & (x,y)\in D,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$　　(D) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}, & (x,y)\in D,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

3. 设随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}6x, & 0\le x\le y\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases},$$

则$P\{X+Y\le 1\}=$ <u>1/4</u> .

4. 设随机变量(X,Y)的联合分布律为

$$P(X=i, Y=j)=\frac{i+j}{30}, i=0,1,2,3; j=0,1,2.$$

则$P\{X>2, Y<2\}=$ <u>7/30</u> .

5. 设二维随机变量(X,Y)的密度函数为:

$$f(x,y)=\begin{cases}10x^2y, & 0\le y\le x\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

试求

(1)(X,Y)分别关于X和Y的边缘密度函数$f_X(x)$和$f_Y(y)$，并判断X与Y是否相互独立;

(2)求条件密度函数 $f_{Y|X}(y\mid 0.5)$.

参考答案：关于 X 的边缘概率密度为：

$$f_X(x)=\begin{cases}5x^4, & 0\le x\le 1\\ 0, & 其他\end{cases};$$

关于 Y 的边缘概率密度为：

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{10}{3}\left(y-y^4\right), & 0\le y\le 1\\ 0, & 其他\end{cases};$$

X 与 Y 不独立;条件密度函数 $f_{Y|X}(y\mid 0.5)$ 为：

$$f_{Y|X}(y\mid 0.5)=\begin{cases}8y, & 0\le y\le \frac{1}{2}\\ 0, & 其他\end{cases}.$$

6. 设二维随机变量 (X,Y) 的联合概率密度函数为：

$$p(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(x+y)\mathrm{e}^{-(x+y)} & x>0,y>0\\ 0 & 其他\end{cases}$$

(1)讨论 X 与 Y 是否独立?

(2)求 $Z=X+Y$ 的概率密度.

参考答案：X 与 Y 不相互独立；Z 的概率密度函数为

$$f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}z^2\mathrm{e}^{-z} & z>0\\ 0 & 其他\end{cases}$$

7. 设二维随机变量 (X,Y) 只能取下列数组中的值：$(0,0)$, $(-1,1)$, $(-1,\dfrac{1}{3})$, $(2,0)$, 且取这些值的概率依次为 $\dfrac{1}{6}$, $\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{1}{12}$, $\dfrac{5}{12}$.

(1)写出 (X,Y) 的概率分布表;

(2)求 (X,Y) 分别关于 X, Y 的边缘分布律.

参考答案：(1) (X,Y) 的分布律

X \ Y	0	1/3	1
-1	0	1/12	1/3
0	1/6	0	0
2	5/12	0	0

(2) (X,Y) 分别关于 X, Y 的边缘分布律

X	-1	0	2
P	$5/12$	$1/6$	$5/12$

Y	0	$1/3$	1
P	$7/12$	$1/12$	$1/3$

8. 设二维随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为:

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-y}, & 0<x<y, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

试求:

(1)边缘概率密度 $f_X(x)$、$f_Y(y)$, 并说明 X 与 Y 的独立性;

(2)在 $Y=0.2$ 的条件下, X 的条件概率密度.

参考答案:关于 X 的边缘概率密度为:

$$f_X(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x>0 \\ 0, & x\le 0 \end{cases};$$

关于 Y 的边缘概率密度为:

$$f_Y(y)=\begin{cases} ye^{-y}, & y>0 \\ 0, & y\le 0 \end{cases};$$

X 与 Y 不相互独立. 在 $Y=0.2$ 的条件下, X 的条件概率密度为:

$$f_{X|Y}(x|0.2)=\begin{cases} 5, & 0<x<0.2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

9. 设二维随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为:

$$f(x,y)=\begin{cases} 3x & 0<x<1, 0<y<x \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

试求:

(1)边缘密度 $f_X(x)$、$f_Y(y)$, 并说明 X 与 Y 的独立性;

(2)条件密度 $f_{X|Y}(x|0.2)$.

参考答案:关于 X 的边缘概率密度为:

$$f_X(x)=\begin{cases} 3x^2 & 0<x<1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases};$$

关于 Y 的边缘概率密度为:

$$f_Y(y)=\begin{cases} \frac{3}{2}(1-y^2) & 0<y<1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases};$$

X 与 Y 不独立；条件密度 $f_{X|Y}(x|0.2)$ 为

$$f_{X|Y}(x|0.2)=\begin{cases}\frac{25}{12}x & \mathbf{0.2}<x<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

10. 设事件 A 、B 满足条件 $P(A)=\dfrac{1}{4}$，$P(B\mid A)=\dfrac{1}{3}$，$P(A\mid B)=\dfrac{1}{2}$，定义随机变量 X 、Y 如下：

$$X=\begin{cases}1, & \text{若}A\text{发生}\\ 0, & \text{若}A\text{不发生}\end{cases}\qquad Y=\begin{cases}1, & \text{若}B\text{发生}\\ 0, & \text{若}B\text{不发生}\end{cases}$$

求二维随机变量 (X,Y) 的联合分布律.

参考答案：(X,Y) 的联合分布律为

X \ Y	0	1
0	8/12	1/12
1	2/12	1/12

11. 设二维随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为：

$$f(x,y)=\begin{cases}A, & |y|<x,0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

试求：

(1)常数 A；

(2)边缘密度 $f_X(x)$ 、$f_Y(y)$，并说明 X 与 Y 的独立性；

(3)条件密度 $f_{X|Y}(x\mid -0.2)$.

参考答案：$A=1$；关于 X 的边缘概率密度为：

$$f_X(x)=\begin{cases}2x & 0<x<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases};$$

关于 Y 的边缘概率密度为：

$$f_Y(y)=\begin{cases}1+y & -1<y<0\\ 1-y & 0\le y<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}.$$

X 与 Y 不独立；条件密度 $f_{X|Y}(x\mid -0.2)$ 为：

$$f_{X|Y}(x\mid -0.2)=\begin{cases}\frac{5}{4} & 0.2<x<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}.$$

第四章　随机变量的数字特征

1. 设随机变量 $X_1,X_2,\ldots,X_n(n\geq 1)$ 独立同分布，且方差为 $D(X_i)=\sigma^2>0$，$(i=1,2,\ldots,n)$，令 $Y=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，则 (**A**) .

(A) $\mathrm{Cov}(X_1,Y)=\frac{\sigma^2}{n}$　　**(B)** $\mathrm{Cov}(X_1,Y)=\sigma^2$

(C) $D(X_1+Y)=\frac{n+2}{n}\sigma^2$　　**(D)** $D(X_1-Y)=\frac{n+1}{n}\sigma^2$

2. 设 X_1,X_2,X_3 相互独立同服从参数 $\lambda=3$ 的泊松分布，$Y=\frac{1}{3}(X_1+X_2+X_3)$，则 $E(Y^2)=$ (**D**) .

(A) 1　　**(B)** 6　　**(C)** 9　　**(D)** 10

3. 设 X 与 Y 为两个随机变量，且它们的相关系数 $\rho_{XY}=0$，则成立的是 (**B**) .

(A) X 与 Y 一定独立　　**(B)** X 与 Y 不相关

(C) X 与 Y 独立且不相关　　**(D)** X 与 Y 仅不相关，但不独立

4. 设 (X,Y) 为二维随机变量，且 $D(X)>0,D(Y)>0$，则下列等式成立的是 (**B**) .

(A) $E(XY)=E(X)\cdot E(Y)$　　**(B)** $\mathrm{Cov}(X,Y)=\rho_{\mathrm{XY}}\cdot\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}$

(C) $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$　　**(D)** $\mathrm{Cov}(2X,2Y)=2\mathrm{Cov}(X,Y)$

5. 设随机变量 X 的数学期望存在，则 $E(E(E(X)))=$ (**B**) .

(A) 0　　**(B)** $E(X)$　　**(C)** $D(X)$　　**(D)** $[E(X)]^2$

6. 设 $X\sim N(0,1)$，$Y\sim N(1,1)$，且 X 与 Y 相互独立，则下列结论正确的是 (**B**) .

(A) $P\{X+Y\leq 0\}=\frac{1}{2}$　　**(B)** $P\{X+Y\leq 1\}=\frac{1}{2}$

(C) $P\{X-Y\leq 0\}=\frac{1}{2}$　　**(D)** $P\{X-Y\leq 1\}=\frac{1}{2}$

7. 设随机变量 X 服从参数为 $\lambda(\lambda>0)$ 指数分布，则 $\frac{D(X)}{E(X)}=$ (**C**) .

(A) 1　　**(B)** λ　　**(C)** $\frac{1}{\lambda}$　　**(D)** λ^2

8. 设随机变量 X 与 Y 的相关系数为 0.5, $E(X)=E(Y)=0$, $E(X^2)=E(Y^2)=2$, 则 $E[(X+Y)^2]=$ ___6___.

9. 若 $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$, $i=1,2,\cdots,n$, 且 X_i 相互独立, 则 $X=c_1X_1+c_2X_2+\cdots+c_nX_n$ 服从 __正态__ 分布, 且 $D(X)=$ __$c_1^2\sigma_1^2+c_2^2\sigma_2^2+\cdots+c_n^2\sigma_n^2$__.

10. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且方差分别为 6 和 3, 则 $D(2X-Y+4)=$ ___27___.

11. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且 $X \sim B\left(16, \frac{1}{2}\right)$, Y 服从于参数为 9 的泊松分布, 则 $D(X-2Y+1)=$ ___**40**___.

12. 设随机变量 X 的数学期望 $E(X)=\mu, D(X)=\sigma^2(>0)$, 则 $P\{|X-\mu| \geq 3\sigma\} \leq$ ___1/9___.

13. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且 $D(X)=4$, $D(Y)=2$ 则 $D(3X-2Y+4)=$ ___**44**___.

14. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且方差分别为 6 和 3, 则 $D(2X-Y+4)=$ ___27___.

15. 设二维离散型随机变量 (X, Y) 的概率分布如图所示, 试求:

(1)分别关于 X、Y 的边缘概率分布, 并判断 X 与 Y 的独立性;

(2)协方差 $\mathrm{cov}(X, Y)$;

(3)概率 $P\{X>Y\}$;

(4)在 $X=0$ 的条件下 Y 的条件分布律;

(5)随机变量 $Z=X^2Y$ 的概率分布.

$Y \backslash X$	-1	0	3
-2	1/15	2/15	0
0	2/15	3/15	4/15
1	0	1/15	2/15

参考答案: X 与 Y 不独立; $\mathrm{cov}(X, Y)=\frac{11}{15}$; $P\{X>Y\}=\frac{3}{5}$; 在 $X=0$ 的条件下 Y 的条件分布律为:

$Y=y_j$	-2	0	1
$P\{Y=y_j \mid X=0\}$	1/3	1/2	1/6

随机变量 $Z=X^2Y$ 的分布律为:

$Z=X^2Y$	-18	-2	0	1	9
P	0	1/15	12/15	0	2/15

16. 掷一枚均匀的骰子两次，设 X 表示出现的点数之和，Y 表示第一次出现的点数减去第二次出现的点数．试求：

(1) $D(X)$，$D(Y)$；

(2) X 与 Y 的相关系数 ρ_{XY}；

(3) 问 X 与 Y 是否独立？

参考答案：$D(X)=\frac{35}{6}$，$D(Y)=\frac{35}{6}$；$\rho_{XY}=0$；X 与 Y 不独立．

17. 设随机变量 $X=\begin{cases}1, & \text{若 } A \text{ 发生}\\ 0, & \text{若 } A \text{ 不发生}\end{cases}$，$Y=\begin{cases}1, & \text{若 } B \text{ 发生}\\ 0, & \text{若 } B \text{ 不发生}\end{cases}$，其中随机事件 A 和 B 相互独立，且 $P(A)=P(B)=p(0<p<1)$．求二维随机变量 (X,Y) 的联合分布律，并说明 X 与 Y 的线性相关性．

参考答案：(X,Y) 的联合分布律为:

X \ Y	0	1
0	$(1-p)^2$	$p(1-p)$
1	$p(1-p)$	p^2

X 与 Y 的不相关．

18. 设 $U=aX+b$，$V=cY+d$，其中 $a>0$，$c>0$，证明：随机变量 U 与 V 的相关系数 ρ_{UV} 等于随机变量 X 与 Y 的相关系数 ρ_{XY}，即 $\rho_{UV}=\rho_{XY}$．

参考答案：略．

19. 设随机变量 (X,Y) 的分布律为:

Y \ X	-1	0	1
-1	1/8	1/8	1/8
0	1/8	0	1/8
1	1/8	1/8	1/8

验证：X 和 Y 是不相关的，但 X 和 Y 不是相互独立的．

参考答案：略．

第五章　大数定律和中心极限定理

1. 在每次试验中，事件 A 发生的概率为 0.5，应用切比雪夫不等式估计在 1000 次试验中，事件发生的次数在 400 与 600 之间的概率 $P\{400 < X < 600\} \geq$ __0.975__.

2. 设 $X_1, X_2, \ldots$ 是独立同分布的随机序列，且具有相同的数学期望和方差 $E(X_i) = 0.1$，$D(X_i) = 0.09\ (i = 1, 2, \ldots)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - 0.1n}{\sqrt{n}} \leq 0.6\right\} =$ __$\Phi(2)$__.

3. 设随机变量 X 与 Y 的期望分别为 -2 与 2，方差分别为 1 和 4，$\rho_{XY} = -0.5$，由切比雪夫不等式，$P\{|X+Y| \geq 6\} \leq$ __1/12__.

4. 某保险公司多年统计资料表明，在索赔户中，被盗索赔户占 20%，以 X 表示在随机抽查的 100 个索赔户中，因被盗向保险公司索赔的户数.

(1)写出 X 的概率分布；

(2)利用中心极限定理，求被盗索赔户不少于 14 户且不多于 30 户的概率近似值.

$(\Phi(1.5) = 0.9332, \Phi(2) = 0.9772, \Phi(2.5) = 0.9938, \Phi(3) = 0.9987)$

参考答案：X 的概率分布为：

$$P\{X = i\} = C_{100}^{i} \times 0.2^{i} \times 0.8^{100-i},\ (i = 0, 1, 2, \cdots, 100);$$

概率的近似值为 0.927.

5. 设元件的正品率为 0.8，若要以 0.95 的概率保证箱内正品数大于 1000 只，试用中心极限定理估计箱内至少要装多少只元件？(注：$\Phi(1.64) = 0.95$)

参考答案：1279.

6. 某公司有 200 名员工参加一种资格证书考试. 按往年经验，该考试通过率为 0.8，试利用中心极限定理计算这 200 名员工至少有 150 人通过考试的概率. ($\Phi(1.65) = 0.95, \Phi(1.77) = 0.9616, \Phi(2.18) = 0.9854$)

参考答案：0.9616.

7. 设电路供电网内有 10000 市灯, 夜间每一盏灯开着的概率为 0.7, 假设各灯的开关是相互独立, 利用中心极限定理计算同时开着的灯数在 6900 与 7100 之间的概率. $(\Phi(1.65)=0.95, \Phi(1.96)=0.975, \quad \Phi(2.18)=0.9854)$

参考答案：0.9708.

8. 我军现对敌人阵地进行 100 次炮击, 已知每次命中炮弹数的数学期望为 2, 均方差为 1.5, 试求这 100 次炮击中, 有 180 颗到 200 颗炮弹命中的概率. (用中心极限定理计算, $\Phi(\frac{4}{3})=0.91$).

参考答案：0.41.

第六章　样本及抽样分布

1. 设 X_1, X_2, X_3, X_4 为来自总体 $X \sim N\left(0, \sigma^2\right)$ 的简单随机样本，则统计量 $\dfrac{X_1 - X_2}{\sqrt{X_3^2 + X_4^2}}$ 的分布为（ **B** ）.

(A) $N(0,2)$　　**(B)** $t(2)$　　**(C)** $\chi^2(2)$　　**(D)** $F(2,2)$

2. 设 X_1, X_2, X_3, X_4 为来自总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的样本，则 $\dfrac{X_1 - X_2}{\sqrt{(X_3 - X_4)^2}} \sim$（ **C** ）.

(A) $\chi^2(1)$　　**(B)** $F(1,2)$　　**(C)** $t(1)$　　**(D)** $N(0,1)$

3. 设随机变量 X 和 Y 相互独立且同服从正态分布 $N(0,4)$. 从中分别抽取样本 X_1, X_2 和 Y_1, Y_2，则统计量 $U = \dfrac{X_1 + X_2}{\sqrt{Y_1^2 + Y_2^2}}$ 服从（ **A** ）.

(A) $t(2)$　　**(B)** $t(4)$　　**(C)** $\chi^2(2)$　　**(D)** $\chi^2(4)$

4. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_6$ 是来自正态总体 $N(0,1)$ 的样本，则统计量 $X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_6^2$ 服从（ **D** ）.

(A) 正态分布　　**(B)** t 分布　　**(C)** F 分布　　**(D)** χ^2 分布

5. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_{16}$ 是来自正态总体 $N(2, \sigma^2)$ 的一个样本，$\overline{X} = \dfrac{1}{16}\sum_{i=1}^{16} X_i$，则 $\dfrac{4\overline{X} - 8}{\sigma} \sim$（ **D** ）.

(A) $t(15)$　　**(B)** $t(16)$　　**(C)** $\chi^2(15)$　　**(D)** $N(0,1)$

6. 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu_1, \sigma^2)$，设总体 Y 服从正态分布 $N(\mu_2, \sigma^2)$，$X_1, X_2, \ldots, X_{n_1}$ 和 $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n_2}$ 分别来自总体 X 和 Y 的简单随机样本，则 $E\left[\dfrac{\sum_{i=1}^{n_1}\left(X_i - \overline{X}\right)^2 + \sum_{j=1}^{n_2}\left(Y_j - \overline{Y}\right)^2}{n_1 + n_2 - 2}\right]$ $=$ $\underline{\quad \sigma^2 \quad}$.

7. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自正态总体 $N(1,16)$ 的一个样本，记样本均值 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，样本方差 $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$，则 $E(S^2)=$ __16__.

第七章　参数估计

1. 设 $\widehat{\theta}_1$, $\widehat{\theta}_2$ 是参数 θ 的两个相互独立的无偏估计, 且 $D(\widehat{\theta}_1)=2D(\widehat{\theta}_2)>0$, 若 $\widehat{\theta}=k_1\widehat{\theta}_1+k_2\widehat{\theta}_2$ 也是 θ 的无偏估计量, 则下列四个估计量中方差最小的是 (**C**) .

(A) $\frac{1}{2}\widehat{\theta}_1+\frac{1}{2}\widehat{\theta}_2$　　**(B)** $\frac{2}{3}\widehat{\theta}_1+\frac{1}{3}\widehat{\theta}_2$　　**(C)** $\frac{1}{3}\widehat{\theta}_1+\frac{2}{3}\widehat{\theta}_2$　　**(D)** $\frac{1}{4}\widehat{\theta}_1+\frac{3}{4}\widehat{\theta}_2$

2. 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, σ^2 未知, 而 μ 为未知参数, $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为样本, 记 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$, 则 $\left(\overline{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{0.025}(n-1),\overline{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{0.025}(n-1)\right)$ 为 μ 的区间, 其置信水平为 (**B**) .

(A) 0.90　　**(B)** 0.95　　**(C)** 0.975　　**(D)** 0.05

3. 设总体 $X\sim B(m,p)$, 其中 $p\ (0<p<1)$ 为未知参数, 从总体 X 中抽取简单随机样本 $X_1,X_2,\ldots,X_n$, 记 p 的矩量估计为 $\widehat{p}$, 则 $E\left[\widehat{p}\right]=$ ___p___ .

4. 设总体 $X\sim N(\mu,1)$, x_1,x_2 为来自总体 X 的一个样本, 估计量 $\widehat{\mu}_1=\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}x_2$, $\widehat{\mu}_2=\frac{1}{3}x_1+\frac{2}{3}x_2$, 则方差较小的估计量是 ___$\widehat{\mu}_1$___ .

5. 设 $\widehat{\theta}_1$, $\widehat{\theta}_2$ 是参数 θ 的两个无偏估计, 如果 $\widehat{\theta}_1$ 比 $\widehat{\theta}_2$ 更有效, 则 $D(\widehat{\theta}_1)$ 和 $D(\widehat{\theta}_2)$ 的大小关系是 ___$<$___ .

6. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是取自总体 $X\sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$ 的一个样本, 且 $C\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2$ 是参数 σ^2 的无偏估计量, 则常数 $C=$ ___$\frac{1}{2(n-1)}$___ .

7. 已知来自容量为 $n=49$ 的正态总体 $N(\mu,7.3^2)$ 的一个样本, 其样本均值 $\overline{x}=28.8$, 则 μ 的置信水平为 0.95 的置信区间是 ___$(26.8,30.8)$___ .

8. 设总体 X 的概率密度函数为: $f(x;\beta)=\begin{cases}\dfrac{\beta}{x^{\beta+1}}, & x>1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$ 其中 $\beta>1$ 为未知参数, 又 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是来自总体 X 的容量 n 的简单随机样本, 试求:

(1)参数 β 的矩估计量;

(2)参数 β 的极大似然估计量.

参考答案:β 的矩估计量为 $\widehat{\beta}=\dfrac{\overline{X}}{\overline{X}-1}$,极大似然估计量为 $\widehat{\beta}=\dfrac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\ln X_i}$.

9. 设总体 X 的概率密度函数为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\frac{\theta^2}{x^3}e^{-\frac{\theta}{x}} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases},$$

其中 $\theta>0$ 是未知参数. $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是来自总体 X 的容量 n 的简单随机样本,试求:

(1)θ 的矩估计量;

(2)θ 的极大似然估计量.

参考答案:θ 的矩估计量为 $\widehat{\theta}=\overline{X}$;极大似然估计量为 $\widehat{\theta}=\dfrac{2n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}}$.

10. 设总体 X 服从指数分布,其概率密度函数 $f(x;\lambda)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$,其中 $\lambda>0$,是未知参数. $x_1,x_2\cdots,x_n$ 是来自总体 X 的一组样本观测值,求参数 λ 的最大似然估计值.

参考答案:参数 λ 的最大似然估计量为 $\widehat{\lambda}=\dfrac{1}{\overline{x}}$.

11. 设某行业的一项经济指标服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$,其中 μ,σ 均未知. 今获取了该指标的 20 个数据作为样本,并算得样本均值 $\overline{x}=56.93$,样本方差 $s^2=(0.93)^2$. 试求:

(1)该项经济指标标准差 σ 的置信水平为 98% 置信区间;

(2)该项经济指标均值 μ 的置信水平为 95% 的(单侧)置信下限.

($\chi^2_{0.01}(19)=36.19$, $\chi^2_{0.99}(19)=7.63$, $t_{0.05}(19)=1.729$, $t_{0.025}(19)=2.093$)

参考答案:置信区间为:$(0.674,1.468)$;单侧置信下限为:56.570.

12. 设总体 X 具有概率密度

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\theta x^{\theta-1} & 0<x<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}\quad(\theta>0)$$

$X_1,X_2\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本,

(1)求参数 θ 的矩估计;

(2)求参数 θ 的极大似然估计.

参考答案：参数 θ 的矩估计

$$\widehat{\theta}=\frac{\overline{X}}{1-\overline{X}};$$

极大似然估计量为

$$\hat{\theta}=-\frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\ln X_i}.$$

13. 某校大二学生线性代数考试成绩 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$, 从中随机地抽取 20 份考卷, 算得平均成绩 $\overline{x}=72$ 分, 样本方差 $s^2=16$ 分, 试求:

(1)学生线性代数考试成绩标准差 σ 的置信水平为 98% 置信区间;

(2)学生线性代数成绩均值 μ 的置信水平为 95% 的（单侧）置信上限.

($\chi^2_{0.01}(19)=36.19$, $\chi^2_{0.99}(19)=7.63$, $t_{0.05}(19)=1.729$, $t_{0.025}(19)=2.093$)

参考答案：$(2.898,6.312)$; 73.5.

14. 设总体 X 具有概率密度

$$f(x;\theta)=\begin{cases}(\theta+1)x^{\theta} & 0<x<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}\quad(\theta>-1),$$

$X_1,X_2\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本,

(1)求参数 θ 的矩估计;

(2)求参数 θ 的极大似然估计.

参考答案：参数 θ 的矩估计

$$\hat{\theta}=\frac{2\overline{X}-1}{1-\overline{X}};$$

极大似然估计量为

$$\hat{\theta}=-\frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\ln X_i}-1.$$

15. 某校大二学生概率统计成绩 X 服从正态分布 $N\left(\mu,\sigma^2\right)$, 从中随机地抽取 25 位考生的成绩, 算得平均成绩 $\overline{x}=72.2$ 分, 样本标准差 $s=18$ 分, 试求:

(1)学生概率统计成绩标准差 σ 的置信水平为 95% 置信区间;

(2)学生概率统计成绩均值 μ 的置信水平为 95% 的（单侧）置信上限.

($\chi^2_{0.025}(24)=39.36$, $\chi^2_{0.05}(24)=36.42$, $\chi^2_{0.975}(24)=12.40$, $\chi^2_{0.95}(24)=13.85$, $t_{0.05}(24)=1.71$, $t_{0.025}(24)=2.06$)

参考答案：$(14.06, 25.04)$; 78.4.

16. 设总体 X 具有概率密度 $f(x)=\begin{cases}\theta x^{\theta-1}, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$ $(\theta>0)$,

(1)求参数 θ 的矩估计；

(2)求参数 θ 的极大似然估计.

参考答案：参数 θ 的矩估计 $\widehat{\theta}=\dfrac{\overline{X}}{1-\overline{X}}$；极大似然估计量 $\widehat{\theta}=-\dfrac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\ln X_i}$.

第八章　假设检验

1. 设总体 $X\sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$, $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体的样本, $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$, 在显著性水平 α 下, 检验假设 $H_0:\sigma^2\le\sigma_0^2\longleftrightarrow H_1:\sigma^2>\sigma_0^2\left(\sigma_0^2\right.$ 为已知数 $)$, 引入

$$\chi^2=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2}{\sigma_0^2},$$

则 H_0 的拒绝域是 (**D**) .

(A) $\chi^2\ge\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ **(B)** $\chi^2\le\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ **(C)** $\chi^2\le\chi^2_{1-\alpha}(n-1)$ **(D)** $\chi^2\ge\chi^2_{\alpha}(n-1)$

2. 来甲城市的旅游者其消费额 X (单位: 元）服从正态分布 $N\left(\mu_1,\sigma_1^2\right)$, 来乙城市的旅游者其消费额 Y (单位: 元）服从正态分布 $N\left(\mu_2,\sigma_2^2\right)$, 从总体 X 中调查 21 人, 平均消费额 $\overline{x}=2386$ 元, 标准差 $s_x=218$ 元, 从总体 Y 中调查 17 人, 平均消费额 $\overline{y}=2172$ 元, 标准差 $s_y=227$ 元, 试在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下, 检验旅游者在这两个城市的消费额有无显著差异. ($F_{0.025}(20,16)=2.68$, $F_{0.025}(16,20)=2.55$, $t_{0.05}(36)=1.69$, $t_{0.025}(36)=2.03$)

参考答案：有显著差异.

3. 设某次考试的考生成绩服从正态分布, 从中随机地抽取 36 位考生的成绩, 算得平均成绩为 66.5 分, 标准差为 15 分, 问在显著性水平 0.05 下, 是否可以认为这次考试全体考生的平均成绩为 70 分?

参考答案：在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下, 可以认为这次考试全体考生的平均成绩为 70 分.