

微积分题汇编（上）参考答案

2025年12月更新

目录

第一章 函数	1
第二章 极限与连续	3
第三章 导数、微分、边际与弹性	5
第四章 中值定理及导数的应用	11
第五章 不定积分	15

第一章 函数

1. C.
2. D.
3. C.
4. C.
5. $[-1, 0] \cup [1, 2]$.
6. $(0, +\infty)$.
7. 9

第二章 极限与连续

1. D.
2. D.
3. D.
4. B.
5. A.
6. C.
7. D.
8. C.
9. B.
10. A.
11. C.
12. B.
13. A.
14. D.
15. C.
16. C.
17. A.
18. A.
19. C.
20. D.
21. B.
22. D.
23. 2.
24. 1.
25. 2.
26. $e^{-\frac{3}{2}}$.
27. $\pm\sqrt{2}$.
28. 2.
29. 3.

30. $\frac{1}{2}$.
31. 1.
32. $\ln 3$.
33. 1.
34. $\frac{1}{2}$.
35. $\frac{1}{2}$.
36. 3
37. \sqrt{e}
38. e^{x-1} .
39. 1.
40. $\frac{1}{2}$
41. $\frac{1}{2}$
42. $a = \frac{1}{2}$
43. 1

第三章 导数、微分、边际与弹性

1. D.

2. B.

3. A.

4. C.

5. C.

6. D.

7. C.

8. B.

9. D.

10. A.

11. B.

12. D.

13. B.

14. D.

15. A.

16. D.

17. C.

18. B.

19. $x + y - 1 = 0$.

20. 2%.

21. $\sin(2f(x)) \cdot f'(x) dx$.

22. 2 条.

23. $y = -x + \frac{\sqrt{2}}{2}$.

24. 32.

25. $y = -\frac{1}{2}x + 2$.

26. $8!/x^9$.

27. $3p$.

28. $y = -2x + 1$.

29. $(-1)^n \frac{n!3^n}{2^{n+1}}$.

30. 8.
31. $-\frac{2}{\pi} dx$.
32. $\frac{1}{f''(t)}$.
33. 1.
34. (10, 20).
35. e^{-1} .
36. $y = -\frac{3}{2}x + 2\sqrt{2}$.
37. $\frac{f'(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} f^2(x) + 2f(\sqrt{x})f(x)f'(x)$.
38. $(x+n)e^x$.
39. 0.
40. -1.
41. e^{-2} .
42. $\frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$.
43. $y - \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}(x - \ln 2)$.
44. $-\pi$.
45. 0.2%.
46. $y = -ex + 1$.
47. 2%.
48. n .
49. $\frac{(\sin x + x \cos x)(1+x) - x \sin x}{(1+x)^2} dx$.
50. $x - y = 0$.
51. 64.
52. $y = x$.
53. 3.
54. $-e^{-2}$.
55. 64.
56. $\frac{f'(\ln x)}{x} + \frac{f'(x)}{f(x)}$.
57. $n! \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.
58. 100!.
59. $a = 2, b = -2$
60. $y' = \frac{e^x - 2y}{e^y + 2x}, y''(0) = -4$
61. $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2t^3}, \frac{d^2x}{dy^2} = -\frac{3}{4} \cdot \frac{1+t^2}{t^7}, \left. \frac{d^2x}{dy^2} \right|_{t=1} = -\frac{3}{2}$.

$$62. \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x(1+\ln y)}, \frac{d^2x}{dy^2} = x(1+\ln y)^2 + \frac{x}{y} = y^y(1+\ln y)^2 + y^{y-1}.$$

$$63. f'(x) = \begin{cases} \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}, f'(x) \text{ 在点 } x=0 \text{ 处连续.}$$

$$64. dy = y' dx = -\left[\frac{1}{x^2} f' \left(\frac{1}{x} \right) + f \left(\frac{1}{x} \right) f'(x) \right] e^{-f(x)} dx.$$

$$65. \frac{dy}{dx} = 3t^2 + 5t + 2, \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(6t+5)(t+1)}{t}.$$

$$66. f'(\tan x) \sec^2 x \cdot \arcsin[f(x)] + \frac{f(\tan x)}{\sqrt{1-f^2(x)}} f'(x).$$

$$67. \text{切线方程: } y-0 = \frac{1}{2}(x-0);$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{126x^5(5y^4+2)^2 - 20y^3(1+21x^6)^2}{(5y^4+2)^3}.$$

68. (1) 当 $a = \varphi'(0)$ 时, $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导, 并且

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{[\varphi'(x) + \sin x]x - (\varphi(x) - \cos x)}{x^2}, & x \neq 0 \\ \frac{1}{2}[\varphi''(0) + 1], & x = 0 \end{cases}$$

(2) $f'(x)$ 在点 $x=0$ 处连续.

69. k 为任何值时, $f(x)$ 在 $x=0$ 处有极限; $k = \pm 1$, 时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续; $k = 1$ 时, $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

$$70. \frac{dy}{dx} = \frac{1}{t}, \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1+t^2}{t^3}.$$

$$71. y'(0) = 1.$$

$$72. y^{(n)} = (-1)^{n-2}(n-2)!x^{-(n-1)} (n=2, 3, 4, \dots).$$

$$73. f'(x) = \begin{cases} 2x \cos(x^2), & x < 0; \\ \frac{1 - \ln(1+x)}{(1+x)^2}, & x > 0. \end{cases}$$

$$74. a = b = -1, f'(x) = \begin{cases} -\cos x, & x > 0 \\ -e^{-x}, & x \leq 0 \end{cases}.$$

$$75. -4.$$

$$76. dy = -\sin(f^2(x)) \cdot 2f(x) \cdot f'(x) dx.$$

$$77. y = 1.$$

78. $R'(20) = 2$, 其经济意义为: 当 $Q = 20$ 时, 产量增加 (减少) 1 个单位, 收益增加 (减少) 约 2 个单位; $\left. \frac{ER}{Ep} \right|_{p=6} = -0.5$, 其经济意义为: 当 $p = 6$ 时, 价格上涨 (下降) 1%, 收益减少 (增加) 0.5%.

$$79. dy = \left[-f' \left(\arcsin \frac{1}{x} \right) \frac{1}{\sqrt{x^4 - x^2}} + 3(f(\sin x))^2 f'(\sin x) \cos x \right] dx.$$

$$80. y' = \frac{e^x - y}{e^y + x}, \quad y''(0) = -2.$$

$$81. y' = f'(\sin x) \cdot \cos x - \sin(f(x)) \cdot f'(x),$$

$$y'' = f''(\sin x) \cos^2 x - f'(\sin x) \sin x - \cos(f(x)) [f'(x)]^2 - \sin(f(x)) f''(x).$$

$$82. \frac{dy}{dx} = \frac{2}{t}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2(1+t^2)}{t^4}.$$

83. 当 $a=1, b=1$ 时, $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 且 $f'(0)=1$.

$$84. dy = 2 \cos(\ln x) dx.$$

$$85. y' = \frac{2xy - 2e^{2x}}{\cos y - x^2},$$

$$y'' = \frac{(2y - 4e^{2x})(\cos y - x^2)^2 + 4x(2xy - 2e^{2x})(\cos y - x^2) + (2xy - 2e^{2x})^2 \sin y}{(\cos y - x^2)^3}.$$

$$86. \frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}t - \frac{1}{2t}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{3}{4t} - \frac{1}{4t^3}.$$

$$87. y' = (x^2 + 1)^3 (x + 2)^2 x^6 \left[\frac{6x}{x^2 + 1} + \frac{2}{x + 2} + \frac{6}{x} \right].$$

$$88. dy = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}(1 + e^{2\sqrt{x}})} dx.$$

$$89. \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-y}{[1 + \sin(x + y)]^3}.$$

$$90. \frac{dy}{dx} = 3t^2 + 5t + 2.$$

91. 若 $a = \ln 2$, 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处导数存在.

$$92. \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}, \quad dy = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx.$$

$$93. y' = \frac{2}{2 - \cos y}.$$

$$94. \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1 + t^2}{4t}.$$

$$95. y' = y \left(\frac{4}{2x + 1} + \frac{1}{3x - 2} - \frac{2}{3x - 9} \right).$$

$$96. dy = \frac{-x}{|x|\sqrt{1-x^2}} dx.$$

97. 1.

$$98. 2(1 + t^2)$$

$$99. dy = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) dx$$

$$100. \frac{e^y}{1 - xe^y}$$

101. 当 $0 < p < 90$ 时, 销售收入随 p 增加而增加; 当 $90 < p < 990$ 时, 销售收入随 p 增加而减少; 当 $p = 90$ 时, 销售收入达到最大, 此时最大销售收入为 $R(90) = 8100$.

102. 由函数 $f(x) = \tan x - x - \frac{1}{3}x^3$ 在 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时单调递增易得.

103. 由导数的定义易得.

第四章 中值定理及导数的应用

1. A.
2. D.
3. B.
4. D.
5. B.
6. D.
7. B.
8. A.
9. C.
10. C.
11. B.
12. D.
13. B.
14. D.
15. A.
16. B.
17. D.
18. A.
19. B.
20. D.
21. B.
22. 10.
23. 1.
24. 1.
25. $y\left(\frac{1}{e}\right) = e^{-\frac{2}{e}}$.
26. 1.
27. $(-1, 0]$ 内单调减少.
28. 2.
29. 3.

30. $\frac{\pi}{2}$.
31. 12.
32. $(0, e^{-1})$.
33. $f(-10) = 132$.
34. 10.
35. 27.
36. 2.
37. 10.
38. $1 + \frac{1}{\ln Q - \ln a}$.
39. 2.
40. $\frac{1}{2}$.
41. $e^2 + \frac{1}{6}$
42. 凹: $(-\infty, 0), (1, +\infty)$; 凸: $(0, 1)$; 拐点 $(0, 2), (1, 1)$
43. 拐点为 $(\pm 1, \ln 2)$; 凹区间 $(-1, 1)$; 凸区间 $(-\infty, -1)$ 和 $(1, +\infty)$.
44. e.
45. 函数的单增区间为 $(-\infty, 1)$ 和 $(3, +\infty)$, 单减区间为 $(1, 3)$; 极小值为 $y(3) = \frac{27}{4}$; 函数图形在区间 $(-\infty, 0)$ 内是凸的, 在区间 $(0, 1), (1, +\infty)$ 内是凹的; 拐点为点 $(0, 0)$; $x = 1$ 是铅直渐近线; $y = x + 2$ 是函数图形的斜渐近线.
46. e^{-3} .
47. 单增区间为 $(0, +\infty)$, 单减区间为 $(-\infty, 0)$, 极小值为 $f(0) = 0$; 凹区间为 $(-1, +\infty)$, 凸区间为 $(-\infty, -1)$, 拐点为 $(-1, -\frac{2}{e} + 1)$.
48. $e^{-\frac{1}{2}}$.
49. 当 $r = \frac{a}{2\pi + 8}, x = \frac{a}{\pi + 4}$ 时, 正方形和圆的面积之和达到最小.
50. $y'(-1) = 0, y''(-1) = -2, \lim_{x \rightarrow -1} \frac{y(x) - 1}{(x + 1)^2} = -1$.
51. e^4 .
52. $-\frac{1}{2}$.
53. 递增区间为 $(-\infty, -1), (0, +\infty)$; 递减区间为 $(-1, 0)$. 极小值为 $f(0) = -e^{\frac{\pi}{3}}$ 极大值为 $f(-1) = -2e^{\frac{\pi}{12}}$.
54. e^2 .
55. 1800.
56. $e^{\frac{2}{3}}$.
57. 凹区间: $(2, +\infty)$, 凸区间: $(-\infty, 2)$, 拐点: $(2, 2e^{-2})$.
58. (1) 增区间: $(-\infty, 1), (2, +\infty)$, 减区间: $(1, 2)$, 极大值为 $y(1) = 5$, 极小值为 $y(2) = 4$.

(2) 当 $a < 4$ 或 $a > 5$ 时, 方程 $f(x) = a$ 恰有一个实数解; 当 $a = 4$ 或 $a = 5$ 时, 方程 $f(x) = a$ 恰有二个实数解; 当 $4 < a < 5$ 时, 方程 $f(x) = a$ 恰有三个实数解.

59. e^2 .

60. 凹区间: $(-\infty, 0), (1, +\infty)$; 凸区间: $(0, 1)$; 拐点: $(0, 1), (1, 0)$.

61. $\frac{1}{6}$.

62. e^{-1} .

63. $a = -1, b = 3$ 时, 点 $(1, 3)$ 是曲线 $y = ax^3 + bx^2 + 1$ 的拐点.

64. 当批数取最接近 $\sqrt{\frac{ac}{2b}}$ 的自然数时, 才能使两种费用之和最省.

65. $\frac{1}{3}$.

66. 1.

67. 当年产量为 300 个单位时, 总利润最大, 最大利润为 25000

68. 1.

69. 拐点为 $(2, 2e^{-2})$, 凸区间为 $(-\infty, 2)$, 凹区间为 $(2, +\infty)$.

70. $\frac{q-b}{2}$.

71. a^a .

72. 1.

73. 1.

74. $a = 0, b = 1$.

75. e^{-1} .

76. $\frac{1}{2}$

77. $y_{\min} = -1, y_{\max} = \frac{3}{5}$

78. $x = 0$ 处不可导; $f'(x) = \begin{cases} -\cos x, & x < 0, \\ -\sin 2x, & x > 0. \end{cases}$

79. 边际收益 $R'(500) = 59$; 利润最大时 $Q = 20000$, 最大利润 340000 元.

80. 边际收益 64; 最大利润 330000 (当 $Q = 20000$ 时).

81. 使用拉格朗日中值定理即可得结论.

82. 圆柱形蓄水池底半径 $r = \sqrt[3]{\frac{150}{\pi}}$ 米, 高 $h = 2r = 2\sqrt[3]{\frac{150}{\pi}}$ 米, 总造价最低.

83. 由罗尔定理易得.

84. 利用函数的单调性易得.

85. 利用零点定理和拉格朗日中值定理.

86. 由函数 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处取得最大值 $f(1) = 1 - a$, 可得结论.

87. 由拉格朗日中值定理易得.

88. 由罗尔定理易得.

89. 由罗尔定理易得.

90. 由罗尔定理易得.
91. 由罗尔定理易得.
92. 令 $F(x) = \frac{f(x)}{e^x}$, 易知其导数为 0, 可得结论.
93. 利用函数的单调性易证.
94. 由拉格朗日中值定理易得.
95. 由拉格朗日中值定义易得.
96. 由罗尔定义易得.
97. 由拉格朗日中值定理, 或者函数的单调性易得.

第五章 不定积分

1. B.

2. A.

3. A.

4. D.

5. A.

6. C.

7. D.

8. D.

9. C.

10. A.

11. B.

12. B.

13. D.

14. B.

15. $\sin 1$

16. $-\frac{1}{2}e^{x^2}$.

17. $x^3 + 2 \arctan x + C$.

18. $\ln|x| + \frac{1}{5}e^{5x} + C$.

19. $\cos\left(\frac{1}{x}\right) + C$.

20. $\frac{5^x e^x}{\ln 5 + 1} + C$.

21. $\frac{1}{2}x^2\left(\ln x - \frac{1}{2}\right) + C$.

22. $-\frac{1}{x} - \arctan x + C$.

23. $\frac{5^x e^x}{1 + \ln 5} + C$.

24. $2[\sqrt{x} f(\sqrt{x}) - F(\sqrt{x})] + C$.

25. $\frac{x}{\sqrt{4-x^2}} - \arcsin \frac{x}{2} + C$

26. $x \arctan(2x) - \frac{1}{4} \ln(1 + 4x^2) + C$
27. $\frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-3}{x+1} \right| + C.$
28. $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C.$
29. $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \arcsin x + C.$
30. $\sqrt{1+x^2} \arctan x - \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C.$
31. $-\frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{(1-x^2)^3}}{x^3} + C.$
32. $x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) - \frac{1}{2} (\arctan x)^2 + C.$
33. $2 \arcsin \frac{x}{2} - \frac{x}{2} \sqrt{4-x^2} + C$
34. $-(1+e^{-x}) \ln(1+e^x) + x + C.$
35. $\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{x \ln x}{\sqrt{2}} + C.$
36. $-2x^2 e^{-x^2} - e^{-x^2} + C.$
37. $-\frac{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{3x^3} + C.$
38. $x^2(\sin x + x \cos x) + C.$
39. $(\arctan \sqrt{x})^2 + C.$
40. $(x+1)e^{-x} + C.$
41. $\frac{x}{2} f'(2x) - \frac{1}{4} f(2x) + C.$
42. $\sqrt{x^2-1} + \frac{1}{3} (\sqrt{x^2-1})^3 + C.$
43. $\frac{x \cos x - 2 \sin x}{x} + C.$
44. $\ln|3+2 \ln x| + C.$
45. $-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - \ln(\sqrt{1+x^2} - x) + C.$
46. $\frac{6}{11} x^{\frac{11}{6}} - 6x^{\frac{1}{6}} + C.$
47. $x - (1+e^{-x}) \ln(1+e^x) + C.$
48. $\arcsin \frac{x-2}{2} + C.$
49. $\frac{1}{5} (x+2)(3x+1)^{\frac{2}{3}} + C.$
50. $\frac{x^3}{3} \arctan x - \frac{1}{6} x^2 + \frac{1}{6} \ln(1+x^2) + C.$
51. $\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C.$
52. $\cos x - \frac{2 \sin x}{x} + C.$

53. $\frac{5}{6} \ln|x-1| + \frac{7}{6} \ln|x+5| + C.$

54. $\frac{1}{3}(x^2+2)\sqrt{x^2-1} + C.$

55. $\frac{1}{2}x(\cos \ln x + \sin \ln x) + C.$

56. $\arcsin(\ln x) + C$

57. $f(x) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)', \quad \int x f'(x) dx = \frac{x \cos x - 2 \sin x}{x} + C$