微积分题汇编（上）

2025 年 10 月更新

目录

第一章　函数

1. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$, 则函数 $f\left(x+\frac{1}{3}\right)+f\left(x-\frac{1}{3}\right)$ 的定义域为 (　　).

(A) $[0,1]$　　(B) $\left[-\frac{1}{3},\frac{4}{3}\right]$　　(C) $\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]$　　(D) $\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right]$

2. 设 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$, 则函数 $f\left(x+\frac{1}{4}\right)+f\left(x-\frac{1}{4}\right)$ 的定义域为 (　　).

(A) $[0,1]$　　(B) $\left[-\frac{1}{4},\frac{5}{4}\right]$　　(C) $\left[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right]$　　(D) $\left[\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right]$

3. 下列两对函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 相同的是 (　　).

(A) $f(x)=\ln x^2,\ g(x)=2\ln x$

(B) $f(x)=x,\ g(x)=\sin(\arcsin x)$

(C) $f(x)=\ln(\sqrt{x^2+1}-x),\ g(x)=-\ln(\sqrt{x^2+1}+x)$

(D) $f(x)=x,\ g(x)=\mathrm{e}^{\ln x}$

4. 函数 $f(x)=\dfrac{\cos x}{x}$ 在其定义域上是 (　　).

(A) 有界奇函数　　(B) 有界偶函数　　(C) 无界奇函数　　(D) 无界偶函数

5. 函数 $f(x)=\arcsin\left(x^2-x-1\right)$ 的定义域 $D=$ ____________.

6. 设 $f(x)$ 定义域为 $(-\infty,+\infty)$, 则 $f(\ln x)$ 的定义域为 ____________.

7. 设 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上有定义, 且 $f(x)=\begin{cases} x-2, & x\geq 10 \\ f\left[f(x+5)\right], & x<10 \end{cases}$, 则 $f(5)=$ ____________(填实数).

第二章　极限与连续

1. 设函数 $f(x)=\dfrac{\sin(x-1)}{x^2-1}$, 则下列说法正确的是（　）.

(A) $x=-1$ 是可去间断点　　(B) $x=1$ 是无穷间断点

(C) $x=-1$ 是跳跃间断点　　(D) $x=1$ 是可去间断点

2. 下列变量在给定变化过程中是无穷小量的是（　）.

(A) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x \ (x\to\infty)$　　(B) $\dfrac{x^2}{\sqrt{x^3-2x+1}} \quad (x\to+\infty)$

(C) $\dfrac{\sin x}{x} \quad (x\to 0)$　　(D) $\dfrac{x^2}{x+1}\left(3-\sin\dfrac{1}{x}\right) \quad (x\to 0)$

3. 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 不存在, 则（　）.

(A) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]$ 及 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{g(x)}{f(x)}$ 一定都不存在

(B) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]$ 及 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{g(x)}{f(x)}$ 一定都存在

(C) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]$ 及 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{g(x)}{f(x)}$ 恰好一个存在, 而另一个不存在

(D) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]$ 及 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{g(x)}{f(x)}$ 都不一定存在

4. 当 $x\to 0^+$ 时，若 $\ln^{\alpha}(1+2x), (1-\cos x)^{\frac{1}{\alpha}}$, 均是比 x 高阶无穷小量，则 α 的取值范围是（　）.

(A) $(2,+\infty)$　　(B) $(1,2)$　　(C) $(\dfrac{1}{2},1)$　　(D) $(0,\dfrac{1}{2})$

5. 函数 $f(x)=\dfrac{(e^{\frac{1}{x}}+e)\tan x}{x(e^{\frac{1}{x}}-e)}$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的第一类间断点是 $x=$（　）.

(A) 0　　(B) 1　　(C) $-\dfrac{\pi}{2}$　　(D) $\dfrac{\pi}{2}$

6. 函数 $f(x)=\dfrac{x^2-x}{x^2-1}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$ 的第一类间断点的个数为 ( ).

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

7. 下列极限中, 极限**不为**0 的是 ( ).

(A) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\arctan x}{x}$　　(B) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2\sin x+3\cos x}{x}$

(C) $\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\dfrac{1}{x}$　　(D) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{x^5+x^3}$

8. 下列运算正确的是 ( ).

(A) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sin x\cdot\cos\dfrac{1}{x}\right)=0\cdot\lim\limits_{x\to 0}\cos\dfrac{1}{x}=0$

(B) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-x}{x^3}=0$

(C) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x+2}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{x}=0$

(D) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\tan 3x}{\sin 5x}=\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{3x}{5x}=\dfrac{3}{5}$

9. 设函数 $f(x)=\dfrac{x\ln x^2}{|x-1|}$, 则 $f(x)$ 有 ( ).

(A) 两个可去间断点　　(B) 一个可去间断点, 一个跳跃间断

(C) 两个无穷间断点　　(D) 一个可去间断点, 一个无穷间断点

10. 当 $x\to 0$ 时, $\sqrt{2+x^3}-\sqrt{2}$ 与 x^2 比较是 ( ).

(A) 高阶无穷小量　(B) 等价无穷小量　(C) 低阶无穷小量　(D) 同阶无穷小量

11. 函数 $f(x)=\dfrac{\sin(x+1)}{x^2-3x-4}$, 下列说法错误的是 ( ).

(A) 有渐近线 $y=0, x=4$

(B) $x=4$ 为无穷间断点

(C) 在区间 $(1,4)$ 上有界

(D) 若补充定义 $f(-1)=-\dfrac{1}{5}$, 则 $f(x)$ 在点 $x=-1$ 处连续

12. 函数 $f(x)=\dfrac{\sin(x-1)}{x^2-1}$ 的第二类间断点是 ( ).

(A) $x=1$　　(B) $x=-1$　　(C) $\dfrac{1}{2}$　　(D) $-\dfrac{1}{2}$

13. 函数 $f(x)=\dfrac{x}{\cos x}$ 的第一类间断点个数是 (　　).

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

14. 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有定义是 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在的 (　　).

(A) 必要条件　　(B) 充分条件　　(C) 充要条件　　(D) 无关条件

15. 函数 $f(x)=\dfrac{x}{\tan x}$ 的第一类间断点是 (　　).

(A) $x=2\pi$　　(B) $x=-\pi$　　(C) $x=0$　　(D) $x=\pi$

16. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(1-x^2)}{x-1}=$ (　　).

(A) $-\dfrac{1}{2}$　　(B) 2　　(C) -2　　(D) $\dfrac{1}{2}$

17. 下列函数在其定义域内连续的是 (　　).

(A) $f(x)=\dfrac{1}{x}$

(B) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$

(C) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{|x|}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$

(D) $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x\neq 0\\ \cos x, & x=0\end{cases}$

18. 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$, 则必有 (　　).

(A) $f(x)$ 在点 x_0 的某一个去心领域内有定义;

(B) $f(x)$ 仕点 x_0 处有定义;

(C) $f(x)$ 在点 x_0 的任意一个去心领域内有定义;

(D) $a=f(x_0)$.

19. 函数 $f(x)=\dfrac{x}{\sin x}$ 的第一类间断点是 (　　).

(A) $x=\dfrac{\pi}{2}$;　　(B) $x=-\pi$;　　(C) $x=0$;　　(D) $x=\pi$.

20. 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有定义是 $f(x)$ 在点 x_0 处极限存在的 (　　).

(A) 充分条件　　(B) 必要条件　　(C) 充要条件　　(D) 无关条件

21. 函数 $f(x)=\arctan\dfrac{1}{x}$ 的间断点是 (　　).

(A) 可去间断点　　(B) 跳跃间断点　　(C) 无穷间断点　　(D) 振荡间断点

22. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ 的极限为 (　　).

(A) 1　　　(B) -1　　　(C) 1 或 -1　　　(D) 不存在

23. 若函数 $y=\dfrac{x-2}{x^2-3x+a}$ 有一个可去间断点, 则 $a=$____________.

24. 函数 $y=\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{x(x-1)}$ 的第一类间断点是 $x=$____________.

25. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=$ ____________.

26. 设函数 $f(x)=\begin{cases}(1-\dfrac{3x}{2})^{\frac{1}{x}}, & x\neq 0\\ A, & x=0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处连续，则 $A=$ ____________.

27. 当 $x\to 0$ 时, $1-\cos kx$ 与 x^2 是等价无穷小量, 则 $k=$ ____________.

28. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=$ ____________.

29. 设 $f(x)=x\sin\dfrac{3}{x}+\dfrac{\sin x}{x}$, 则 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=$ ____________.

30. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{e^x-e^{-x}}=$ ____________.

31. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}+x\sin\dfrac{1}{x}\right)=$ ____________.

32. 若 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{kx}=9$，则 $k=$ ____________.

33. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{\sin x}{x}+x\sin\dfrac{1}{x}\right)$ 等于____________.

34. 要使函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$ 在点 $x=0$ 处连续, 应补充定义 $f(0)=$____________.

35. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{e^x-e^{-x}}$ 的值等于 ____________.

36. 求极限 $\lim\limits_{x\to0^-}\left(e^{\frac{1}{x}}\sin\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{\arcsin 3x}{x}\right)$.

37. 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1+e^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$.

38. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+x}{n+1}\right)^n$.

39. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(1-\dfrac{1}{n})^{\sqrt{n}}$.

40. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+1}+\dfrac{2}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n}\right)$

41. 计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+n^2}-n\right)$.

42. 设函数

$$f(x)=\begin{cases}5e^x-\cos x, & x\le 0,\\ \dfrac{\sin 2x}{\tan ax}, & x>0,\end{cases}$$

问当 a 取何值时, $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

43. 计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$.

第三章　导数、微分、边际与弹性

1. 设函数 $f(x)=\sin 2x+3^x+\cos 1$, 则导数值 $f'(0)=$ (　　).

(A) $\ln 3-2$　　(B) $\ln 3+1-\sin 1$　　(C) $\ln 3+2-\sin 1$　　(D) $\ln 3+2$

2. 设 $y=f(\cos x)$, 且函数 $f(x)$ 可导, 则微分 $\mathrm{d}y=$ (　　).

(A) $-\sin x f'(x)\mathrm{d}x$　　(B) $-\sin x f'(\cos x)\mathrm{d}x$

(C) $\sin x f'(\cos x)\mathrm{d}x$　　(D) $f'(-\cos x\sin x)\mathrm{d}x$

3. 下列函数的弹性不是常数的是 (　　).

(A) $y=ax+b$　　(B) $y=ax$　　(C) $y=\dfrac{a}{x}$　　(D) $y=x^a$

4. 设 $y=f(\mathrm{e}^{-x})$, 且函数 $f(x)$ 可导, 则微分 $\mathrm{d}y=$ (　　).

(A) $f'(\mathrm{e}^{-x})\mathrm{d}x$　　(B) $\mathrm{e}^{-x}f'(\mathrm{e}^{-x})\mathrm{d}x$　　(C) $-\mathrm{e}^{-x}f'(\mathrm{e}^{-x})\mathrm{d}x$　　(D) $-f'(\mathrm{e}^{-x})\mathrm{d}x$

5. 已知生产某商品 Q 单位, 需求函数为 $Q=16-\dfrac{P}{3}$, 当 $P=8$ 时，若价格上涨 1%, 则需求将 (　　).

(A) 减少 0.8%　　(B) 增加 0.8%　　(C) 减少 0.2%　　(D) 增加 0.2%

6. 设 $Q=f(p)$ 为需求函数, 其中 p 为价格 (单位: 元 / 吨), Q 为需求量 (单位: 吨). 若价格为 100 元 / 吨时的需求弹性为 $\eta(100)=-\dfrac{100}{f(100)}\cdot f'(100)=0.25$, 则当价格调整为 101 元 / 吨时, 需求量将约 (　　).

(A) 增加 25%　　(B) 增加 0.25%　　(C) 减少 25%　　(D) 减少 0.25%

7. 函数 $y=|\sin x|$ 在 $x=0$ 处是 (　　).

(A) 无定义　　(B) 有定义，但不连续

(C) 连续但不可导　　(D) 连续且可导

8. 设 $y=x+\sin x$, $\mathrm{d}y$ 是 y 在 $x=0$ 点的微分，则当 $\Delta x\to 0$ 时，有 (　　).

(A) $\mathrm{d}y$ 与 Δx 相比是等价无穷小

(B) $\mathrm{d}y$ 与 Δx 相比是同阶 (非等价) 无穷小

(C) $\mathrm{d}y$ 是比 Δx 高阶的无穷小

(D) $\mathrm{d}y$ 是比 Δx 低阶的无穷小

9. 设函数 $y=(1+\cos x)^{\arcsin x}$, 则微分 $\mathrm{d}y\big|_{x=0}=$ (　　).

(A) $-2\,\mathrm{d}x$　　(B) $-\ln 2\,\mathrm{d}x$　　(C) $2\,\mathrm{d}x$　　(D) $\ln 2\,\mathrm{d}x$

10. 设需求函数 $Q=3000\mathrm{e}^{-0.125p}$, 则当价格 $p=10$, 且上涨 1% 时，需求量 Q 约 (　　)
.

(A) 减少 1.25%　　(B) 增加 1.25%　　(C) 减少 125%　　(D) 增加 125%

11. 设函数 $f(x)=\sin 2x+3^x$, 则导数值 $f'(0)=$ (　　).

(A) $\ln 3-2$　　(B) $\ln 3+2$　　(C) 1　　(D) $\ln 3+1$

12. 设 $f(x)=3^x+x^2+\ln 3$, 则 $f'(1)$ 等于 (　　).

(A) $3\ln 3$　　(B) $\dfrac{1}{3}$　　(C) $\dfrac{3}{\ln 3}+2$　　(D) $3\ln 3+2$

13. 设 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x+1)-f(1-x)}{x}=$ (　　).

(A) $f'(1)$　　(B) $2f'(1)$　　(C) 0　　(D) $f'(2)$

14. 某需求函数为 $Q=-100P+3000$，那么当 $P=20$ 时需求的价格弹性 $E_d=$ (　　).

(A) 2　　(B) 1000　　(C) -100　　(D) -2

15. 设 $f(x)=2^x+\ln 2$, 则 $f'(1)$ 等于 (　　).

(A) $2\ln 2$;　　(B) $2\ln 2+\dfrac{1}{2}$;　　(C) $\dfrac{2}{\ln 2}$;　　(D) $\dfrac{2}{2\ln 2}+\dfrac{1}{2}$.

16. 设函数 $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$, 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处 (　　).

(A) 极限不存在　　(B) 极限存在但不连续

(C) 连续但不可导　　(D) 可导

17. 设函数 $f(x)=-f(-x)$, 在 $(0,+\infty)$ 内 $f'(x)>0,\ f''(x)>0$, 则在 $(-\infty,0)$ 内 (　　)
.

(A) $f'(x)<0, f''(x)<0$　　(B) $f'(x)<0, f''(x)>0$

(C) $f'(x)>0, f''(x)<0$　　(D) $f'(x)>0, f''(x)>0$

18. 已知函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导, 且导数为 2, 则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1-3x)-f(1)}{2x}=$ (　　) .

(A) 3　　(B) -3　　(C) -6　　(D) 6

19. 由参数方程 $\begin{cases} x=\mathrm{e}^{-t} \\ y=\arctan t \end{cases}$ 所确定的曲线在 $t=0$ 处的切线方程是____________.

20. 已知某商品的需求函数为 $Q=3000-100P$, （P 为价格, Q 为需求量）, 当价格 $P=20$ 时, 若价格上涨 1%, 则需求量将下降 ____________.

21. 设函数 $f(x)$ 可导, 则函数 $y=\sin^2(f(x))+2$ 的微分 $\mathrm{d}y=$ ____________.

22. 曲线 $y=\dfrac{x^2}{2x-1}$ 的渐近线条数为 ____________ 条.

23. 曲线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$ 在 $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{4},\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)$ 处的切线方程是____________.

24. 设函数 $y=\sin 2x$, 则 $y^{(5)}(0)=$____________.

25. 曲线 $\begin{cases} x=2\mathrm{e}^{t} \\ y=\mathrm{e}^{-t} \end{cases}$ 在 $t=0$ 的相应点处的切线方程是____________.

26. 设函数 $y=x\ln x$, 则 $y^{(10)}=$____________.

27. 设某产品的供给函数为 $Q=10\mathrm{e}^{3p}$, 则供给 Q 对价格 p 的弹性为 $E_s=$____________.

28. 设函数 $y=f(x)$ 由方程 $\mathrm{e}^{2x+y}-\cos(xy)=\mathrm{e}-1$ 所确定, 则曲线 $y=f(x)$ 在 $(0,1)$ 处的切线方程为 ____________.

29. 设函数 $f(x)=\dfrac{1}{3x+2}$, 对正整数 n, 则 $f^{(n)}(0)=$ ____________.

30. 设产量为 Q, 单价为 P, 厂商成本函数为 $C(Q)=100+13Q$, 需求函数为 $Q(P)=\dfrac{800}{P+3}-2$, 则厂商取得最大利润时的产量为 ____________.

31. 设函数 $f(x)=(1+\cos x)^{\frac{1}{x}}$, $\mathrm{d}y|_{x=\frac{\pi}{2}}=$____________.

32. 设 $\begin{cases} x=f'(t) \\ y=tf'(t)-f(t) \end{cases}$, 其中 $f(t)$ 具有二阶导数, 且 $f''(t)\neq 0$, 则 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=$____________.

33. 设函数 $f(x)=x(\sin x)^{\cos x}$, 则 $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=$____________.

34. 设商品的需求函数为 $Q=100-5P$, 其中 Q,P 分别表示需求量和价格. 如果商品需求弹性的绝对值大于 1 , 则商品的价格的取值范围是____________.

35. 设曲线 $f(x)=x^n, n\in N$ 在点 $(1,1)$ 处的切线与 x 轴相交于 $(\xi_n,0)$, 则极限 $\lim\limits_{n\to\infty} f(\xi_n)$ $=$____________.

36. 由参数方程 $\begin{cases} x=2\cos t \\ y=2\sin^3 t \end{cases}$ 所确定的曲线在 $t=\dfrac{\pi}{4}$ 处的切线方程是____________.

37. 设 $y=f(\sqrt{x})f^2(x)+f(\mathrm{e})$, 其中 $f(x)$ 在 R 上可导,
则 $y'=$____________.

38. 设函数 $y=x\mathrm{e}^x$, 对正整数 n, n 阶导数 $y^{(n)}=$____________.

39. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\cos\frac{2}{x}}{\arcsin x}=$____________.

40. 某商品的需求函数为 $Q=400-100P$, 则 $P=2$ 时的需求弹性为____________.

41. 为使函数 $f(x)=(1-x)^{\frac{2}{x}}$ 在点 $x=0$ 处连续, 应定义 $f(0)=$____________.

42. 设函数 $y=\dfrac{x}{\ln x}$, 则导数 $y'=$____________.

43. 曲线 $\begin{cases} x=\ln\left(1+t^2\right) \\ y=\arctan t \end{cases}$ 在 $t=1$ 的对应点处的切线方程是____________.

44. 设 $y=(1+\sin x)^x$, 则 $y'\big|_{x=\pi}=$____________.

45. 已知某商品的需求函数为 $Q=16-\frac{P}{3}$(P 为价格, Q 为需求量), 当价格 $P=8$ 时, 若价格上涨 1%, 则需求量将下降约____________.

46. 曲线 $y+xe^y=1$ 在点 $P(0,1)$ 处的切线方程是 ____________.

47. 已知某商品的需求函数为 $Q=3000-100P$, (P 为价格,Q 为需求量), 当价格 $P=20$ 时, 若价格上涨 1%, 则需求量将下降 ____________.

48. 设函数 $f(x)=xe^x$, 对正整数 n, 则 $f^{(n)}(0)=$ ____________.

49. 设函数 $y=\dfrac{x\sin x}{1+x}$, 则微分 $\mathrm{d}y=$ ____________.

50. 曲线 $y=xe^x$ 在点 $(0,0)$ 处切线的方程是 ____________.

51. 设某种商品的总收益 R 关于销售量 Q 的函数为 $R(Q)=104Q-0.4Q^2$, 则销售量 Q 为 50 个单位时总收益的边际收入是 ____________.

52. 曲线 $y=xe^x$ 在 $(0,0)$ 处的切线方程是 ____________.

53. 设生产某产品 Q 单位的总成本为 $C(Q)=1100+\dfrac{Q^2}{1200}$, 则生产 1800 个单位产品时的边际成本是____________.

54. 曲线 $y=xe^x$ 在拐点处切线的斜率是____________.

55. 设某种商品的总收益 R 关于销售量 Q 的函数为 $R(Q)=104Q-0.4Q^2$, 则销售量 Q 为 50 个单位时总收益的边际收入是____________.

56. 设函数 $f(x)$ 可导, 且 $y=f(\ln x)+\ln f(x)$, 则 $y'=$____________.

57. 设 $f(x)=(x+1)(x+2)\cdots(x+n)$, 则 $f'(0)=$____________.

58. $f(x)=x(x+1)(x+2)\cdots(x+99)$, 则 $f^{(100)}(x)=$ ____________.

59. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x^2, & x\le 2\\ ax+b, & x>2\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导, 求参数 a 和 b.

60. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y+2xy-e^x=0$ 确定, 试求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 和 $y''(0)$.

61. 设 $\begin{cases}x=\arctan t\\ y=t^2-\ln\left(1+t^2\right)\end{cases}$, 试求 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$ 和 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}\right|_{t=1}$.

62. 已知 $x=y^y$ (其中 $y>0$), 求一阶导数 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 与二阶导数 $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}$.

63. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x} & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$, 求 $f'(x)$, 并指出 $f'(x)$ 在点 $x=0$ 处的连续性.

64. 设 $y=f\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{-f(x)}$, 其中 $f(x)$ 可导, 求 $\mathrm{d}y$.

65. 设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=t-\ln(t+1)\\ y=t^3+t^2\end{cases}$ 所确定, 求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 及 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

66. 设 $f(x)$ 是可导函数, 求函数 $y=f(\tan x)\cdot\arcsin[f(x)]+\mathrm{e}^2$ 的导数.

67. 求由方程 $y^5+2y=x+3x^7$ 所确定的隐函数 $y(x)$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程并求 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

68. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\varphi(x)-\cos x}{x}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$, 其中 $\varphi(t)$ 具有连续的二阶导数, 且 $\varphi(0)=1$.

(1) 确定 a 的值, 使 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导, 并求 $f'(x)$;

(2) 讨论 $f'(x)$ 在点 $x=0$ 处的连续性.

69. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x<0;\\ k^2, & x=0;\\ kx\mathrm{e}^x+1, & x>0.\end{cases}$ 试分析在点 $x=0$ 处,

(1) k 为何值时, $f(x)$ 有极限;

(2) k 为何值时, $f(x)$ 连续;

(3) k 为何值时, $f(x)$ 可导.

70. 求由参数方程 $\begin{cases}x=\ln\sqrt{1+t^2}\\ y=\arctan t\end{cases}$, 所确定的函数的一阶导数 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 及二阶导数 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

71. 求由方程 $\sin(xy)+\ln(y-x)=x$ 所确定的隐函数 y 在 $x=0$ 处的导数 $y'(0)$.

72. 已知 $y=x\ln x$, 求 $y^{(n)}$.

73. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\sin\left(x^2\right), & x\le 0\\ \dfrac{\ln(1+x)}{1+x}, & x>0\end{cases}$, 求 $f'(x)$.

74. 设 $f(x)=\begin{cases}b(1+\sin x)+a+2, & x>0\\ e^{ax}-1, & x\le 0\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导, 求 a,b 及 $f'(x)$.

75. 已知函数 $\begin{cases}x=\sin t\\ y=\cos 2t\end{cases}$, 求 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{6}}$.

76. 设 $y=\cos\left(f^2(x)\right)+f(\sin 1)$, 其中 $f(x)$ 可微, 求 dy.

77. 求曲线 $y^3=(x^2+1)^{\sin x}$ 上 $x=0$ 处的切线方程.

78. (A 班)需求函数为 $p=10-\dfrac{Q}{5}$,
(1) 求当 $Q=20$ 时的边际收益, 并说明其经济意义;
(2) 求当 $p=6$ 时的收益弹性, 并说明其经济意义.

79. 设函数 $y=f\left(\arcsin\dfrac{1}{x}\right)+\left(f(\sin x)\right)^3$, 其中 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上具有一阶导数, 求 dy.

80. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y+xy-e^x=0$ 确定, 试求 $\dfrac{dy}{dx}$ 与 $y''(0)$.

81. 设函数 $y=f(\sin x)+\cos\left(f(x)\right)$, 其中 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上具有一阶导数与二阶导数, 求 $\dfrac{dy}{dx}$ 与 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

82. 设函数 $y=f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=t-\arctan t\\ y=\ln(1+t^2)\end{cases}$ 所确定, 试求 $\dfrac{dy}{dx}$ 与 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

83. 设 $f(x)=\begin{cases}ax+b, & x<0\\ e^x, & x\ge 0\end{cases}$, 确定 a,b 的值使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

84. 已知函数 $y=x[\sin(\ln x)+\cos(\ln x)]$, 试求 $\mathrm{d}y$.

85. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $x^2y-\mathrm{e}^{2x}=\sin y$ 所确定, 试求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 与 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

86. 设函数 $y=f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=1-t^2 \\ y=t-t^3 \end{cases}$ 所确定, 试求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 与 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

87. 设函数 $y=(x^2+1)^3(x+2)^2x^6$, 试求 y'.

88. 已知函数 $y=\arctan\mathrm{e}^{\sqrt{x}}$，试求 $\mathrm{d}y$.

89. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\cos(x+y)=y$ 所确定，试求 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

90. 设函数 $y=f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=t-\ln(1+t) \\ y=t^3+t^2 \end{cases}$ 所确定，试求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

91. 确定 a,b 的值，使得函数 $f(x)=\begin{cases} 2^x, & x\geq 0 \\ ax+b, & x<0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导.

92. 已知函数 $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$, 试求 $\mathrm{d}y$.

93. 设函数 $y=f(x)$ 由方程 $x-y+\dfrac{1}{2}\sin y=0$ 所确定, 计求 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

94. 设函数 $y=f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=\ln\left(1+t^2\right), \\ y=t-\arctan t, \end{cases}$ 所确定, 试求 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

95. 设函数 $y=\dfrac{(2x+1)^2\sqrt[3]{3x-2}}{\sqrt[3]{(x-3)^2}}$, 试求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

96. $y=\arcsin\sqrt{1-x^2}$, 求 $\mathrm{d}y$..

97. $y\ln x=x\ln y$, 求 $y'\big|_{x=1}$.

98. 假设 $\begin{cases} x=\arctan t \\ y=\ln\left(1+t^2\right) \end{cases}$, 求 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

99. 已知 $y=x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\sqrt{1+x^2}$, 求 $\mathrm{d}y$.

100. 已知隐函数方程 $y=xe^y+1$ 确定了 y 是 x 的函数, 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

101. 设某种商品的单价为 p 时, 售出的商品数量 Q 可以表示成:

$$Q=\frac{10000}{p+10}-10,\quad (0<p<990).$$

(1) 求 p 在何范围内变化时, 使相应的销售收入增加或减少;

(2) 要使销售收入最大, 商品单价 p 应取何值? 最大销售收入是多少?

102. (B 班) 证明：当 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 时, $\tan x > x+\dfrac{1}{3}x^3$.

103. 已知函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义, 对任意的实数 x_1, x_2, 有

$$f(x_1+x_2)=f(x_1)f(x_2),$$

且 $f(0)\neq 0,\quad f'(0)=1$, 证明: $\quad f'(x)=f(x)$.

第四章　中值定理及导数的应用

1. 下列函数在给定区间上满足罗尔定理条件的是 (　　).

(A) $f(x)=x^2-3x+2,\quad x\in[1,2]$

(B) $f(x)=\cos\left(x^2+x\right),\quad x\in[0,1]$

(C) $f(x)=1-x^{\frac{2}{3}},\quad x\in[-1,1]$

(D) $f(x)=\begin{cases} x^2+2, & x<2 \\ 2, & x\geq 2 \end{cases},\quad x\in[0,2]$

2. 已知曲线 $y=\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$, 则下列说法错误的是 (　　).

(A) 在 $(-\infty,0),(0,+\infty)$ 内单调增加

(B) 有水平和垂直渐近线

(C) 无极值

(D) 没有拐点

3. 下列极限中, 不能使用洛必达法则的是 (　　).

(A) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$

(B) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$

(C) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$

(D) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\dfrac{x-2}{x+3}$

4. 设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内具有二阶导数, $x_0\in(a,b)$, 若 $f'(x_0)=0, f''(x_0)=0$, 则 $f(x_0)$ (　　).

(A) 是极大值

(B) 是极小值

(C) 是拐点的纵坐标

(D) 可能是极值也可能不是极值

5. 设 $f(x)$ 在 $[-2,2]$ 上可导, 且 $f'(x)>f(x)>0$, 则 (　　).

(A) $\dfrac{f(-2)}{f(-1)}>1$

(B) $\dfrac{f(0)}{f(-1)}>\mathrm{e}$

(C) $\dfrac{f(1)}{f(-1)}<\mathrm{e}^2$

(D) $\dfrac{f(-2)}{f(-1)}>\mathrm{e}^3$

6. 当 $x\to 0$ 时, 下列无穷小量

① $\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}$　② $\sqrt{1+2x}-\sqrt[3]{1+3x}$　③ $x-\left(\dfrac{4}{3}-\dfrac{1}{3}\cos x\right)\sin x$

④ $\mathrm{e}^{x^4-x}-1$ 从低阶到高阶排列顺序为 (　　).

(A) ①②③④

(B) ③①②④

(C) ④③②①

(D) ④②①③

7. 下列函数在给定区间上满足罗尔定理条件的是 (　　).

(A) $f(x)=\begin{cases} e^{x-1}, & 0<x\le 2 \\ e, & x=0 \end{cases}$, $[0,2]$　　(B) $f(x)=x^2-2x-3$, $[-1,3]$

(C) $f(x)=\dfrac{1}{(x-1)^4}$, $[0,2]$　　(D) $f(x)=|x|$, $[-1,1]$

8. 设函数 $f(x)$ 满足关系式 $f''(x)+\left[f'(x)\right]^2=-e^x$, 且 $f'(0)=0$, 则 (　　).

(A) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值

(B) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值

(C) 点 $(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

(D) $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值，点 $(0,f(0))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

9. 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的 δ 邻域 $(x_0-\delta,x_0+\delta)(\delta>0)$ 内三阶导数 $f'''(x)>0$, 且二阶导数值 $f''(x_0)=0$, 则曲线 $y=f(x)$ (　　).

(A) 在 $(x_0-\delta,x_0)$ 内是凹弧, 在 $(x_0,x_0+\delta)$ 内是凸弧

(B) 在 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 内是凸弧

(C) 在 $(x_0-\delta,x_0)$ 内是凸弧, 在 $(x_0,x_0+\delta)$ 内是凹弧

(D) 在 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 内是凹弧

10. 函数 $f(x)=\arctan x+\operatorname{arccot} x=$ (　　).

(A) 0　　(B) $2x$　　(C) $\dfrac{\pi}{2}$　　(D) π

11. 曲线 $y=e^{-\frac{1}{x}}$, 则下列说法正确的是 (　　).

(A) 在 $(-\infty,0),(0,+\infty)$ 内单调减少　　(B) 没有极值

(C) 在 $(-\infty,\dfrac{1}{2})$ 内图形是下凹的　　(D) 没有拐点

12. 函数 $y=f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处连续且取得极小值, 则 $f(x)$ 在 x_0 处必有 (　　).

(A) $f'(x_0)=0$　　(B) $f''(x_0)>0$

(C) $f'(x_0)=0$ 且 $f''(x_0)>0$　　(D) $f'(x_0)=0$ 或不存在

13. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有定义, 在开区间 (a,b) 内可导, 则 (　　).

(A) 当 $f(a)f(b)<0$ 时, 存在 $x_0\in(a,b)$, 使得 $f(x_0)=0$

(B) 对任何 $x_0\in(a,b)$, 有 $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)-f(x_0)\right]=0$

(C) 当 $f(a)=f(b)$ 时, 存在 $x_0\in(a,b)$, 使得 $f'(x_0)=0$

(D) 存在 $x_0\in(a,b)$, 使得 $f(b)-f(a)=f'(x_0)(b-a)$

14. 函数 $y=x^3+12x+1$ 在定义域内 ( ).

(A) 图形是凸的 (B) 图形是凹的 (C) 单调减少 (D) 单调增加

15. 下列函数在给定的区间上满足罗尔定理条件的是 ( ).

(A) $f(x)=x^2-5x+6$, $[2,3]$

(B) $f(x)=\sin x$, $\left[\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right]$

(C) $f(x)=\sqrt{x^2}e^{x^2}$, $[-1,1]$

(D) $f(x)=\begin{cases} x+1, & x<5, \\ 1, & x\geq 5., \end{cases}$ $[0,5]$

16. 当 $x\to 0$ 时，$x-\sin x$ 是比 x^2 的 ( ).

(A) 低阶无穷小

(B) 高阶无穷小

(C) 等价无穷小

(D) 同阶但非等价无穷小

17. 下列函数在给定区间上满足罗尔定理条件的是 ( ).

(A) $f(x)=\begin{cases} e^{x-1}, & 0<x\leq 2 \\ e, & x=0 \end{cases}$

(B) $f(x)=|x|$，$[-1,1]$

(C) $f(x)=\dfrac{1}{(x-1)^4}$，$[0,2]$

(D) $f(x)=x^2-2x-3$，$[-1,3]$

18. 若 $(0,1)$ 是曲线 $y=x^3+(b-1)x^2+c$ 的拐点，则有 ( ).

(A) $b=1,c=1$ (B) $b=-1,c=-1$ (C) $b=1,c=-1$ (D) $b=-1,c=1$

19. 下列函数在给定的区间上满足罗尔定理的是 ( ).

(A) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$, $[0,2]$

(B) $f(x)=\sin x$, $\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$

(C) $f(x)=xe^x$ $[0,1]$

(D) $f(x)=\begin{cases} x+1, & x<5 \\ 1, & x\geq 5, \end{cases}$, $[0,5]$

20. 函数 $y=f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处连续且取得极大值, 则 $f(x)$ 在 x_0 处必有 ( ).

(A) $f'(x_0)=0$

(B) $f''(x_0)<0$

(C) $f'(x_0)=0$ 且 $f''(x_0)<0$

(D) $f'(x_0)=0$ 或不存在

21. 已知某商品的需求函数为 $Q=e^{-\frac{P}{5}}$, 当 $P=3$ 时, 下列解释正确的是 ( ).

(A) 价格上升 1%, 需求增加 0.6%

(B) 价格上升 1%, 需求减少 0.6%

(C) 价格上升 1%, 需求增加 60%

(D) 价格上升 1%, 需求减少 60%

22. 函数 $y=2x^3-6x^2-18x$ 在闭区间 $[-2,2]$ 上的最大值是 ____________.

23. 已知 $f(x)$ 在 $x=-2$ 处连续, 且 $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{f(x)}{x+2}=1$, 则 $f'(-2)=$____________.

24. 极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x-2)+1}{x^2}=$ ____________.

25. 函数 $y=x^{2x}$ 在 $(0,1]$ 上的最小值 ____________.

26. 设 $f'(0)=2$, 则 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f\left(\frac{1}{2}x\right)}{x}=$____________.

27. 函数 $y=x-\ln(1+x)$ 在区间 ____________ 内单调减少.

28. 已知点 $(1,1)$ 是曲线 $y=x^2+a\ln x$ 的拐点，则 $a=$____________.

29. 设 $f'(0)=1$, 则 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(2h)-f(-h)}{h}=$ ____________.

30. 设 $f(x)=\ln\sin x, x\in[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6}]$, 则满足罗尔中值定理中的数值 $\xi=$ ____________.

31. 函数 $y=x^2-\dfrac{16}{x}(x<0)$ 的最小值是 ____________.

32. 函数 $f(x)=x\ln x$ 的单调递减区间是____________.

33. 函数 $f(x)=|x^2-3x+2|$ 在区间 $[-10,10]$ 上的最大值为 ____________.

34. 函数 $y=2x^3-6x^2-18x$ 的极大值是 ____________.

35. 函数 $y=x^2-\dfrac{54}{x}$ 在区间 $(-\infty,0)$ 上的最小值是 ____________.

36. 设函数 $f(x)=x(x-1)(x-2)$，则方程 $f'(x)=0$ 的实根个数为 ____________.

37. 函数 $y=2x^3-6x^2-18x$ 在区间 $[-2,2]$ 上的最大值是____________.

38. 设需求函数 $Q=a\mathrm{e}^{-bp}$, 则收益 R 对需求量 Q 的弹性为 $\dfrac{E_R}{E_Q}=$____________.

39. 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x-1}\right)^{kx}=\mathrm{e}^2$, 则 $k=$ ____________.

40. 已知当 $x\to 0$ 时, $\tan x-\sin x$ 与 ax^3 是等价无穷小, 则 $a=$ ________.

41. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x-\sin x}{\tan^3 x}+(1+\sin 2x)^{\frac{1}{x}}\right)$.

42. 求函数 $y=x^4-2x^3+2$ 的凹凸区间及拐点.

43. 求曲线 $y=\ln\left(x^2+1\right)$ 的凹凸区间与拐点.

44. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x+\cos x)^{\frac{1}{x}}$.

45. 已知函数 $f(x)=\dfrac{x^3}{(x-1)^2}$, 求:

(1) 函数 $f(x)$ 的增减区间及极值;

(2) 函数图形的凹凸区间及拐点;

(3) 函数图形的渐近线.

46. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(3\mathrm{e}^{\frac{x}{x-1}}-2\right)^{\frac{1}{x}}$.

47. 求函数 $f(x)=x\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x+1$ 的单调区间与极值及凹凸区间与拐点.

48. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}$.

49. 把一根长度为 a 的铁丝截成两段, 其中一段折成正方形框架, 另一段弯成圆周问当如何截取时，可使围成的正方形和圆的面积之和达到最小?

50. 设 $y=y(x)$ 是由方程 $y^2+xy+x^2+x=0$ 所确定的满足 $y(-1)=1$ 的隐函数，求 $y'(-1)$ 及 $y''(-1)$, 并计算极限 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{y(x)-1}{(x+1)^2}$.

51. (A 班) 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}(\mathrm{e}^x+x)^{\frac{2}{\sin x}}$.

52. (B 班) 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\ln(1+x)}{x^2}-\dfrac{1}{x}\right)$.

53. 求 $y=(x-1)\mathrm{e}^{\frac{\pi}{3}+\arctan x}$ 的单调区间和极值.

54. 求 $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x^2)^{\frac{1}{1-\cos x}}$.

55. (B 班) 一房地产公司有 50 套公寓要出租, 当月租金定为 1000 元时, 公寓会全部租出去, 当月租金每增加 50 元时, 就会多一套公寓租不出去, 而租出去的公寓每月需花费 100 元的维修费. 问房租金定为多少时可获得最大收入?

56. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(x+e^x)^{\frac{1}{3x}}$.

57. 求曲线 $y=xe^{-x}$ 的凹凸区间与拐点.

58. (1) 求函数 $y=f(x)=2x^3-9x^2+12x$ 的单调区间与极值;
(2) 设 a 为实数, 试讨论方程 $f(x)=a$ 的不同实数解的个数.

59. 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{2}{\ln(1+3x)}}$.

60. 求曲线 $y=x^4-2x^3+1$ 的凹凸区间及拐点.

61. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$.

62. 求极限 $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$.

63. 问 a, b 为何值时, 点 $A(1,3)$ 是曲线 $y=ax^3+bx^2+1$ 的拐点?

64. 某商场每年销售商品 a 件, 分为 x 批采购进货. 已知每批采购费用为 b 元, 而未销售商品的库存费用为 c 元/件 · 年. 设销售商品是均匀的, 问分多少批进货时, 才能使以上两种费用的总和为最省?

65. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x\cos x}{x^2\arcsin x}$.

66. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\sin x}$.

67. 某企业生产某种产品，固定成本 20000 元，每生产一单位产品，成本增加 100 元. 已知总收益 R 是年产量 Q 的函数，即

$$R=R(Q)=\begin{cases}400Q-\dfrac{1}{2}Q^2, & 0\le Q\le 400\\ 80000, & Q>400\end{cases}$$

问每年生产多少产品时，总利润最大？最大利润是多少？

68. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}(\dfrac{1}{x})^{\sin x}$.

69. 求曲线 $y=xe^{-x}$ 的出凸区间及拐点.

70. 某企业生产产品 x 件时, 总成本函数为 $C(x)=ax^2+bx+c$, 总收益函数为 $R(x)=px^2+qx$, 其中 $a,b,c,p,q>0,a>p,b<q$. 当企业按最大利润投产时, 对每件产品征收税额为多少才能使总税额最大?

71. 求极限 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^x-a^x}{x-a}\quad(a>0)$.

72. 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}x\ln\dfrac{x}{x-1}$.

73. $\lim\limits_{x\to-\infty}(e^x-x)^{\frac{1}{x}}$.

74. 设函数 $f(x)=\begin{cases}ax+b & x<0\\ \cos x & x\ge 0\end{cases}$, 试求 a,b 的值, 使 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导.

75. 设曲线 $f(x)=x^{-n}$ 在点 $(1,1)$ 处的切线与 x 轴的交点为 $(\xi_n,0)$, 试求 $\lim\limits_{n\to\infty}f(\xi_n)$.

76. 求极限 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cot 2x$.

77. 求函数 $y=\dfrac{x-1}{x+1}$ 在 $[0,4]$ 上的最大值和最小值.

78. 已知

$$f(x)=\begin{cases}1-\sin x, & x<0,\\ \cos^2 x, & x\ge 0,\end{cases}$$

试讨论 $f(x)$ 的可导性, 并在可导处求 $f'(x)$.

79. 设生产某产品的固定成本为 60000 元, 变动成本为每件 20 元, 价格函数为 $P=60-\dfrac{Q}{1000}$, (Q 为销售量), 假设供销平衡.

(1) 求 $Q=500$ 件时的边际收益;

(2) 求 Q 为多少时利润为最大? 并求最大利润.

80. 设生产某产品的固定成本为 70000 元, 变动成本为每件 25 元, 价格函数为 $P=65-\dfrac{Q}{1000}$, (Q 为销售量), 假设供销平衡. 求:

(1) $Q=500$ 件时的边际收益;

(2) Q 为多少时利润最大? 并求最大利润.

81. 设 $0<x<1$, 证明不等式

$$x<\arcsin x<\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

82. 欲做一个容积为 300 立方米的无盖圆柱形蓄水池, 已知池底单位造价为周围单位造价的两倍, 问蓄水池的尺寸应怎样设计才能使总造价最低?

83. 设 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续, 在 $(0,a)$ 内可导, 且 $f(a)=0$, 证明: 存在一点 $\xi\in(0,a)$, 使 $f(\xi)+\xi\cdot f'(\xi)=0$.

84. 证明: 当 $x>0$ 时, $1+\frac{1}{3}x>\sqrt[3]{1+x}$.

85. 已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(0)=0$, $f(1)=1$, 证明:
(1) 存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $f(\xi)=1-\xi$;
(2) 存在两个不同的点 $\eta,\zeta\in(0,1)$, 使得 $f'(\eta)f'(\zeta)=1$.

86. 若 $0<a<1$, 则对于 $x>0$, 证明 $x^a-ax\le 1-a$.

87. 当 $0<a<b<1$ 时, 证明不等式 $\frac{b-a}{\sqrt{1-a^2}}<\arcsin b-\arcsin a<\frac{b-a}{\sqrt{1-b^2}}$.

88. (A 班) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续，在 $(0,\pi)$ 内可导，证明: 至少存在一点 $\xi\in(0,\pi)$, 使得 $f'(\xi)=-f(\xi)\cot\xi$.

89. (B 班) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续, 在 $(0,\pi)$ 内可导, 且 $f(0)=f(\pi)=0$. 证明: 至少存在一点 $\xi\in(0,\pi)$, 使得 $f'(\xi)=-f(\xi)$.

90. (A 班)设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微, 且 $f(a)=f(b)=0$, 试证明：在 (a,b) 内至少存在一点 ξ, 使 $f'(\xi)=3f(\xi)$.

91. 已知 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(1)=0$, 证明在区间 $(0,1)$ 内至少有一点 c, 使得 $f'(c)=-\frac{f(c)}{c}$.

92. 若函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内满足关系式 $f'(x)=f(x)$, 且 $f(0)=1$, 则 $f(x)=\mathrm{e}^x$.

93. 证明：当 $x>0$ 时，$(1+x)\ln^2(1+x)<x^2$.

94. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续, 在 $(0,2)$ 内可导, 且 $f(2)=4$. 试证存在一点 $\xi\in(0.2)$, 使得 $2\xi f(\xi)+\xi^2f'(\xi)=8$.

95. 设 $0<x<1$, 试证明不等式： $x<\arcsin x<\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

96. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 且 $f(a)=f(b)=0$. 试证明：存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $f(\xi)-f'(\xi)=0$. (提示：作辅助函数 $F(x)=\mathrm{e}^{-x}f(x)$)

97. 证明：当 $x\neq 0$ 时, $\mathrm{e}^x>1+x$.

第五章　不定积分

1. 已知 $\int f(x)e^{x^2}\,dx = 2e^{x^2} + C$, 则函数 $f(x) =$ (　　).

(A) $2x$　(B) $4x$　(C) $2e^{x^2}$　(D) 2

2. 已知 $\int df(x) = \int dg(x)$, 则不一定成立的是 (　　).

(A) $f(x) = g(x)$

(B) $f'(x) = g'(x)$

(C) $df(x) = dg(x)$

(D) $\int f'(x)\,dx = \int g'(x)\,dx$

3. 不定积分 $\int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) d(\cos x) =$ (　　).

(A) $-\frac{1}{\cos x} - \cos x + C$

(B) $-\frac{1}{\cos x} - x + C$

(C) $\tan x - \cos x + C$

(D) $\tan x - x + C$

4. $\int f(x)\,dx = x^2 \ln x + C$, 则 $f(x) =$ (　　).

(A) $2x\ln x$　(B) x　(C) $x\ln x$　(D) $x(2\ln x + 1)$

5. 设 $f(x)$ 是连续函数, $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数 (　　).

(A) 当 $f(x)$ 是奇函数时, $F(x)$ 必为偶函数

(B) 当 $f(x)$ 是偶函数时, $F(x)$ 必为奇函数

(C) 当 $f(x)$ 是周期函数时, $F(x)$ 必为周期函数

(D) 当 $f(x)$ 是单调增函数时, $F(x)$ 必为单调增函数

6. 已知 $f'(\cos x) = \sin x$, 则 $f(\cos x) =$ (　　).

(A) $-\cos x + C$

(B) $\cos x + C$

(C) $\frac{1}{2}(\sin x\cos x - x) + C$

(D) $\frac{1}{2}(x - \sin x\cos x) + C$

7. 若 $\int f(x)\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{x^2}+C$, 则 $f(x)=$ (   ) .

(A) 1　　(B) e^{x^2}　　(C) x^2　　(D) $2x$

8. 下列各式中, 与 $\int \sin 2x\mathrm{d}x$ 不相等的是 (   ) .

(A) $-\frac{1}{2}\cos 2x+C$　　(B) $\sin^2 x+C$　　(C) $-\cos^2 x+C$　　(D) $\frac{1}{2}\cos 2x+C$

9. 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内, 如果 $f'(x)=g'(x)$, 则下列各式中一定成立的是 (   ) .

(A) $f(x)=g(x)$　　(B) $f(x)=g(x)+1$

(C) $\int f'(x)\mathrm{d}x=\int g'(x)\mathrm{d}x$　　(D) $\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)'=\left(\int g(x)\mathrm{d}x\right)'$

10. 函数 $2(\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{-2x})$ 的原函数有 (   ) .

(A) $(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})^2$　　(B) $2(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})^2$　　(C) $\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}$　　(D) $4(\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{-2x})$

11. 若 $\int f(x)\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x\sin x+C$, 则 $f(x)$ 等于 (   ) .

(A) $\mathrm{e}^x\sin(x+\frac{\pi}{4})$　　(B) $\sqrt{2}\mathrm{e}^x\sin(x+\frac{\pi}{4})$

(C) $\sqrt{2}\mathrm{e}^x\cos(x+\frac{\pi}{4})$　　(D) $\mathrm{e}^x\cos(x-\frac{\pi}{4})$

12. 设 e^{-x} 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $\int xf(x)\mathrm{d}x=$ (   ) .

(A) $\mathrm{e}^{-x}(1-x)+C$　　(B) $\mathrm{e}^{-x}(1+x)+C$　　(C) $\mathrm{e}^{-x}(x-1)+C$　　(D) $-\mathrm{e}^{-x}(x+1)+C$

13. 若 $\int f(x)\mathrm{d}x=x^2\mathrm{e}^{2x}+C$, 则 $f(x)$ 等于 (   ) .

(A) $2x\mathrm{e}^{2x}$　　(B) $2x^2\mathrm{e}^{2x}$　　(C) $x\mathrm{e}^{2x}$　　(D) $2x(1+x)\mathrm{e}^{2x}$

14. 函数 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 在 $[a,b]$ 上可导的充分条件是：$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 (   ) .

(A) 有界　　(B) 连续

(C) 有定义　　(D) 仅有有限个间断点

15. 设不定积分 $\int f(x)\mathrm{d}x=x^{\sin x}+C$, 则 $f(1)=$____________

16. 设不定积分 $\int \frac{x}{f(x)}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{-x^2}+C$, 则函数 $f(x)=$____________.

17. 不定积分 $\int \frac{3x^4+3x^2+2}{1+x^2}\,dx =$ ____________.

18. 不定积分 $\int \frac{1+xe^{5x}}{x}\,dx =$____________.

19. 不定积分 $\int \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\,dx =$ ____________.

20. 不定积分 $\int 5^x e^x\,dx =$ ____________.

21. 不定积分 $\int x\ln x\,dx =$ ____________.

22. 不定积分 $\int \frac{1}{x^2(1+x^2)}dx =$ ____________.

23. 不定积分 $\int 5^x e^x\,dx$ 等于____________.

24. 设 $\int f(x)\,dx = F(x)+C$, 则 $\int f'(\sqrt{x})\,dx =$____________.

25. 计算不定积分 $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(4-x^2)^3}}$.

26. 计算不定积分 $\int \arctan(2x)\,dx$.

27. 计算不定积分 $\int \frac{1}{x^2-2x-3}\,dx$.

28. 计算不定积分 $\int \frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}\,dx$.

29. 已知 $\arcsin x$ 为 $f(x)$ 的一个原函数, 求 $\int x f'(x)\,dx$.

30. 计算不定积分 $\int \frac{x\arctan x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$.

31. 求不定积分 $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^4} \mathrm{d}x$.

32. 求不定积分 $\int \frac{x^2}{1+x^2} \arctan x \, \mathrm{d}x$.

33. 求不定积分 $\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} \mathrm{d}x$.

34. 设 $f(\ln x)=\frac{\ln(1+x)}{x}$, 求不定积分 $\int f(x)\mathrm{d}x$.

35. 求不定积分 $\int \frac{1+\ln x}{2+(x\ln x)^2} \mathrm{d}x$.

36. 已知 $f(x)$ 的一个原函数是 e^{-x^2}, 求 $\int x f'(x)\mathrm{d}x$.

37. 求不定积分 $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^4} \mathrm{d}x$.

38. 设 $f(x)$ 的一个原函数为 $x^2\sin x$, 计算不定积分 $\int x f'(x)\mathrm{d}x$.

39. 求 $\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)} \mathrm{d}x$.

40. (B 班) 设 e^{-x} 是 $f(x)$ 的一个原函数, 求 $\int x f(x)\mathrm{d}x$.

41. (A 班)求 $\int x f''(2x)\mathrm{d}x$.

42. 求不定积分 $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2-1}} \mathrm{d}x$.

43. 已知 $\frac{\sin x}{x}$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 求不定积分 $\int x f'(x)\mathrm{d}x$.

44. 求不定积分 $\int \frac{2}{x(3+2\ln x)} \mathrm{d}x$.

45. 设 $f(x)$ 的一个原函数是 $\ln(\sqrt{1+x^2}-x)$, 求不定积分 $\int xf'(x)\mathrm{d}x$.

46. 求不定积分 $\int(\sqrt[3]{x}-\frac{1}{\sqrt{x}})(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}})\mathrm{d}x$.

47. 设 $f(\ln x)=\frac{\ln(1+x)}{x}$, 试求 $\int f(x)\mathrm{d}x$.

48. 求不定积分 $\int\frac{1}{\sqrt{4x-x^2}}\mathrm{d}x$.

49. 求不定积分 $\int\frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}}\mathrm{d}x$.

50. 求不定积分 $\int x^2\arctan x\mathrm{d}x$.

51. 求 $\int\frac{x^3}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

52. 设函数 $f(x)$ 的一个原函数是 $\frac{\sin x}{x}$, 试求 $\int xf'(x)\mathrm{d}x$.

53. 求不定积分 $\int\frac{2x+3}{x^2+4x-5}\mathrm{d}x$

54. 求不定积分 $\int\frac{x^3}{\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x$.

55. 求不定积分 $\int\cos\ln x\,\mathrm{d}x$.

56. 计算积分 $\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$.

57. 若 $f(x)$ 的原函数为 $\frac{\sin x}{x}$, 问 $f(x)$ 与 $\frac{\sin x}{x}$ 间的关系, 并求 $\int xf'(x)\mathrm{d}x$.