微积分题汇编（下）

2026年03月更新

目录

第六章　定积分及其应用

1. 下列定积分或广义积分等于 0 的是 (　　).

(A) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^7}\mathrm{d}x$　　(B) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{|x|}{1+x^4}\mathrm{d}x$

(C) $\displaystyle\int_{-1}^{1}x^3\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$　　(D) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\sin x\,\mathrm{d}x$

2. 下列反常积分发散的是 (　　).

(A) $\displaystyle\int_{2}^{+\infty}\frac{1}{x\ln^2 x}\mathrm{d}x$　(B) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$　(C) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$　(D) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sin x}\mathrm{d}x$

3. 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 且 x 是 $[a,b]$ 上任意一点, 下列等式错误的是 (　　) .

(A) $\displaystyle\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{x}^{b}f(t)\mathrm{d}t=-f(x)$　　(B) $\displaystyle\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{a}^{b}f(x)\mathrm{d}x=f(x)$

(C) $\displaystyle\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{a}^{b}f(x)\mathrm{d}x=0$　　(D) $\displaystyle\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int f(x)\mathrm{d}x=f(x)$

4. 下列式子正确的是 (　　).

(A) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$　　(B) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x=0$

(C) $\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x=0$　　(D) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=-2$

5. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续且不恒等于零，则下列各式中不恒为常数的是 (　　)

(A) $f(b)-f(a)$　(B) $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$　(C) $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$　(D) $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$

6. 下列选项中是广义积分的是 (　　).

(A) $\displaystyle\int_{1}^{2}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$　(B) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x$　(C) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$　(D) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$

7. 定积分$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\frac{1}{2}-\sin x\right|\mathrm{d}x=$ (　　).

(A) $\sqrt{3}-1-\frac{\pi}{12}$　　(B) $\frac{\pi}{4}-1$　　(C) $1-\frac{\pi}{4}$　　(D) 0

8. 设 $f(x)$ 为连续函数，且 $I(u)=\int_a^u f(x)\mathrm{d}x-\int_a^u f(t)\mathrm{d}t$, $a<u<b$, 则 $I(u)$ (　　).

(A) 恒大于零　　(B) 恒小于零　　(C) 恒等于零　　(D) 可正，可负

9. 下列不等式中, 成立的是 (　　).

(A) $\int_1^{\mathrm{e}}\ln^2 x\,\mathrm{d}x>\int_1^{\mathrm{e}}\ln x\,\mathrm{d}x$　　(B) $\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2}\ln^2 x\,\mathrm{d}x>\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2}\ln x\,\mathrm{d}x$

(C) $\int_1^{+\infty}x^3\,\mathrm{d}x>\int_1^{+\infty}x^2\,\mathrm{d}x$　　(D) $\int_{-1}^{-2}x^4\,\mathrm{d}x>\int_{-1}^{-2}x^3\,\mathrm{d}x$

10. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 则对任意 $x\in[a,b]$, 下列式子正确的是 (　　).

(A) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(x)$　　(B) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_x^b f(x)\mathrm{d}x=f(x)$

(C) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(x)\mathrm{d}x=f(x)$　　(D) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=f(t)$

11. 设$I_1=\int_3^4\ln x\mathrm{d}x$, $I_2=\int_3^4(\ln x)^3\mathrm{d}x$, 则$I_1$与$I_2$的大小关系是 (　　).

(A) $I_1=I_2$　　(B) 不能确定　　(C) $I_1<I_2$　　(D) $I_1>I_2$

12. 设函数$f(x)$为连续偶函数, $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$, 则$F(-x)=$ (　　).

(A) 0　　(B) $F(x)$　　(C) $-F(x)$　　(D) 非零常数

13. [另附] 设函数$f(x)$为连续奇函数, $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$, 则$F(-x)=$ (　　).

(A) 0　　(B) $F(x)$　　(C) $-F(x)$　　(D) 非零常数

14. 设$I_1=\int_1^2 x^2\mathrm{d}x$, $I_2=\int_1^2 x^4\mathrm{d}x$, 则$I_1$与$I_2$的大小关系是 (　　).

(A) $I_1=I_2$　　(B) 不能确定　　(C) $I_1<I_2$　　(D) $I_1>I_2$

15. $\int_{-5}^{5} \frac{x^2 \sin^3 x}{1+x^4} \mathrm{d}x =$ ________.

16. 求极限 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\int_0^{x^2} t^2 \ln(1+t)\mathrm{d}t}{x^8} =$ ________.

17. 广义积分 $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-5x} \mathrm{d}x =$ ________.

18. 求极限$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\int_0^{2x} \ln\left(1+t^3\right)\mathrm{d}t}{\sin^4 x} =$________.

19. 反常积分 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+6x+10} \mathrm{d}x$ 的敛散性是________ （填"收敛"或"发散"）

.

20. 求极限 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\int_0^{x^2} \ln\cos t \, \mathrm{d}t}{x^2} =$________.

21. $\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \frac{1}{x^2} \cos\frac{1}{x} \mathrm{d}x =$ ________.

22. 极限$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\int_0^{x} \arctan t \, \mathrm{d}t}{x^2} =$ ________.

23. 由$y=x^3$, $y=0$及$x=1$所围图形绕y轴旋转所得旋转体的体积是 ________.

24. 设 $f(x)$ 为连续函数, 且 $\int_0^{x} f(t)\mathrm{d}t = x^3 + \ln(x+1)$, 则 $f(x) =$ ________.

25. $\int_{-1}^{1} \left(x^3 \cos x + 1\right)\mathrm{d}x =$ ________.

26. 设 $F(x) = \int_{x^2}^{0} t\mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t$, 则 $F'(x) =$________.

27. $\int_{-1}^{1} \left(x^2 \tan x - \frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x =$________.

28. 反常积分 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\left(1+\ln^2 x\right)} \mathrm{d}x =$________.

29. 曲线 $y=2x^2$ 与直线 $y=4x$ 围成平面图形的面积为____________.

30. 反常积分 $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-5x}\,\mathrm{d}x=$ ____________.

31. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续, 且 $\int_0^{x^2} f(t)\,\mathrm{d}t=x^4$, 则 $f(x)=$ ____________.

32. 设 $y=\int_0^{x^3}\sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t$, 则 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=$ ____________.

33. 若 $\int_x^{2\ln 2}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{\mathrm{e}^t-1}}=\frac{\pi}{6}$, 求 x.

34. 设

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+x^2}, & x\geq 0,\\ \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}, & x<0,\end{cases}$$

求 $\int_{-\infty}^{2} f(x-1)\,\mathrm{d}x$.

35. 求由曲线 $y=\mathrm{e}^x$, y 轴及该曲线过原点的切线所围成的图形面积和该图形绕 x 轴旋转一周所形成的立体体积.

36. 求定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin 2x\,\mathrm{d}x$.

37. 求由曲线 $y=2\cos(3x), x\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right]$ 与 x 轴围成的图形的面积 S 以及该平面图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积 V_x .

38. 求定积分 $\int_0^{\pi} x\sin x\,\mathrm{d}x$.

39. 已知 $f(x)$ 具有一阶连续导数, 且 $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=4, f(2)=3$, 求定积分 $\int_0^2 x f'(x)\,\mathrm{d}x$.

40. 在曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 上点 $(1,\mathrm{e})$ 处作一切线 L, 试求:

(1) 切线 L 的方程;

(2) 由曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 、切线 L 以及 y 轴所围图形的面积 A;

(3) 上述所围平面图形绕 x 轴旋转一周所成旋转体的体积 V.

41. 计算定积分 $\int_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$.

42. 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{2x}\sin t\,\mathrm{d}t}{\ln(1+x^2)}$.

43. 计算定积分 $\int_0^4 \cos(\sqrt{x}-1)\,\mathrm{d}x$.

44. (A 班) 设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，在区间 $(0,1)$ 上大于零，并满足 $xf'(x)-f(x)=\dfrac{3a}{2}x^2$ (a 为常数), 且假设 $y=f(x)$ 与 $x=1, y=0$ 所围成的图形 S 的面积为 2. 求:

(1) $f(x)$;

(2) 当 a 为何值时，图形 S 绕 x 轴旋转一周所得旋转体体积最小？其最小体积为多少?

45. (B班) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有连续二阶导数且满足方程:

$$xf'(x)=f(x)+140x^6.$$

(1) 求 $f(x)$ 的表达式;

(2) 是否存在函数 $f(x)$, 它在开区间 $(0,1)$ 上大于零，并满足上面的方程, 且曲线 $y=f(x)\,(x\in[0,1])$ 与直线 $x=1, y=0$ 所围成的图形 D 的面积为 2？请说明理由.

46. 计算定积分 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\cos x}{2+\sin x}+x^3\cos x\right)\mathrm{d}x$.

47. 计算定积分 $\mathrm{I}=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$.

48. 过点(1,2)作抛物线 $y=x^2+1$ 的切线，设该切线与抛物线及 y 轴所围的平面区域为 D.

(1) 求 D 的面积 A;

(2) 求 D 绕 x 轴一周的旋转体体积 V_x.

49. 计算定积分 $\int_{\frac{1}{2}}^{1}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

50. 设函数曲线 $y=\ln x$, 试求:

(1) 曲线上 $x=\mathrm{e}$ 处的切线方程;

(2) 曲线与切线以及 x 轴所围成的图形的面积;

(3) 该图形绕 x 轴旋转所得的旋转体的体积.

51. 计算定积分 $\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

52. 计算定积分 $\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

53. 计算定积分 $\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$.

54. 计算定积分 $\int_{-2}^4 |x^2-2x-3|\mathrm{d}x$.

55. 计算定积分 $\int_1^{16} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$ (提示：令 $t=\sqrt[4]{x}$, $x=t^4$, $\mathrm{d}x=4t^3\mathrm{d}t$)

56. 计算反常积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+5}$.

57. 设平面图形由曲线 $y=\mathrm{e}^x$, 直线 $y=\mathrm{e}x$, $x=0$ 围成. 试求:

(1) 该图形的面积;

(2) 该图形绕 x 轴旋转而成的旋转体体积.

58. 计算定积分 $\int_1^{\mathrm{e}^3} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+\ln x}}$.

59. 计算定积分 $\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}} |\ln x|\mathrm{d}x$.

60. 求曲线 $y=\ln x$ 在区间 $(2,6)$ 内的一条切线, 使得该切线与直线 $x=2$, $x=6$ 和该曲线所围成的平面图形的面积最小.

61. 设 $u=\sin\left(xy^2\right)+x$, 试求 u_x, u_y.

62. 设 $u(x,y,z)=\dfrac{z}{x^2+y^2}$, 试求 $\mathrm{d}u$.

63. 某企业的一种产品在甲乙两地的需求函数分别是 $Q_1=19-0.1p_1$, $Q_2=44-0.4p_2$ (其中 p_1,p_2 分别表示甲、乙两地的市场价格, Q_1,Q_2 分别表示甲、乙两地的需求量). 已知生产该产品的总成本函数为 $150+10Q_1+10Q_2$. 试问: 应如何确定甲、乙两地的市场价格, 能使企业利润最大?

64. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0$, $0<f'(x)<1\,(0<x<1)$. 证明: $\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2>\int_0^1 f^3(x)\mathrm{d}x$.

65. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$上连续，证明:

$$\int_0^\pi x f(\sin x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)\mathrm{d}x.$$

66. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续, 证明:

$$\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\int_0^1(1-x)f(x)\mathrm{d}x$$

67. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 且 $f'(x)<0$, 证明函数

$$F(x)=\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

在 (a,b) 单调递减.

68. 设函数$f(x)$为连续函数, 验证：$\int_0^\pi x f(\sin x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)\mathrm{d}x$.并利用此结果计算积分$\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$.

第七章　向量代数与空间解析几何

1. 在空间直角坐标系中, 方程 $x^2+y^2+z^2=2x$ 表示 (　　).

(A) 柱面　　(B) 球面　　(C) 平面　　(D) 抛物面

2. 方程 $x^2+y^2-2z^2=9$ 表示的三维空间中图形是 (　　).

(A) 球面　　(B) 旋转曲面　　(C) 平面　　(D) 柱面

3. 点 $(4,-3,5)$ 到 oy 轴的距离为 (　　).

(A) $\sqrt{4^2+(-3)^2+5^2}$　(B) $\sqrt{(-3)^2+5^2}$　(C) $\sqrt{4^2+(-3)^2}$　(D) $\sqrt{4^2+5^2}$

第八章　多元函数微分学

1. 由方程 $z^3 = xy$ 所确定的隐函数 $z = f(x,y)$ 在点 $(1,1)$ 的全微分 dz 为 (　).

(A) $-\frac{1}{3}dx - \frac{1}{3}dy$　(B) $dx + dy$　(C) $\frac{1}{3}dx + \frac{1}{3}dy$　(D) $-dx - dy$

2. 当 $x = 1, y = 1$ 时, 二元函数 $z = e^{x^2y^3}$ 的全微分是 (　).

(A) $2e\,dx + 3e\,dy$　(B) $5e$　(C) $3e\,dx + 2e\,dy$　(D) $2dx + 3dy$

3. 已知 $z = f(\sin x, 3x + 2y)$, 其中函数 $f(\cdot,\cdot)$ 具有一阶偏导数, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} =$ (　).

(A) $f_1' + 2f_2'$　(B) $f_1' + 3f_2'$　(C) $f_1'\cos x + 5f_2'$　(D) $f_1'\cos x + 3f_2'$

4. 球面 $x^2 + y^2 + z^2 - 2z = 0$ 围成的立体内部的点是 (　).

(A) $(0,0,2)$　(B) $(0,0,-2)$　(C) $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$　(D) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

5. 考虑二元函数 $f(x,y)$ 的下面四条性质:

①$f(x,y)$ 在点 (x_0, y_0) 处连续;

②$f(x,y)$ 在点 (x_0, y_0) 处两个偏导数都连续;

③ $f(x,y)$ 在点 (x_0, y_0) 处可微;

④ $f(x,y)$ 在点 (x_0, y_0) 处两个偏导数都存在.

若用 "$P \Longrightarrow Q$" 表示性质 P 推出性质 Q, 则有 (　)

(A) ③ $\Longrightarrow$ ② $\Longrightarrow$ ①　(B) ③ $\Longrightarrow$ ④ $\Longrightarrow$ ①

(C) ③ $\Longrightarrow$ ① $\Longrightarrow$ ④　(D) ② $\Longrightarrow$ ③ $\Longrightarrow$ ①

6. 二元函数$z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$的极大值点是 (　).

(A) $(1,0)$　(B) $(-3,2)$　(C) $(-3,0)$　(D) $(1,2)$

7. 设 $z = \sin(xy)$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} =$ (　).

(A) $y\sin(xy)$　(B) $-y\sin(xy)$　(C) $y\cos(xy)$　(D) $-y\cos(xy)$

8. 如果 $f'_x(x_0,y_0)=f'_y(x_0,y_0)=0$, 则二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处（ ）.

(A) 一定连续 (B) 一定偏导数存在

(C) 一定可微 (D) 一定有极值

9. 设 $z=xe^{xy}$, 则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 等于（ ）.

(A) xye^{xy} (B) e^{xy} (C) x^2e^{xy} (D) $(1+xy)e^{xy}$

10. 设$z=\arctan\dfrac{y}{x}$, 则$\dfrac{\partial z}{\partial x}$等于（ ）.

(A) $-\dfrac{y}{x^2+y^2}$ (B) $\dfrac{y}{x^2+y^2}$ (C) $\dfrac{x}{x^2+y^2}$ (D) $-\dfrac{x}{x^2+y^2}$

11. 函数$f(x,y)$在点(x_0,y_0)连续是$f(x,y)$在点(x_0,y_0)偏导数存在的（ ）.

(A) 充分条件 (B) 必要条件 (C) 充要条件 (D) 无关条件

12. 函数$f(x,y)=x^2-y^2$在其定义域上（ ）.

(A) 有极大值无极小值 (B) 无极大值有极小值

(C) 有极大值有极小值 (D) 无极大值无极小值

13. [另附] 函数$f(x,y)=xy$在其定义域上（ ）.

(A) 有极大值无极小值 (B) 无极大值有极小值

(C) 有极大值有极小值 (D) 无极大值无极小值

14. 设$z=\sqrt{\ln(xy)}$, 则$\dfrac{\partial z}{\partial x}$等于（ ）.

(A) $\dfrac{1}{x\sqrt{\ln(xy)}}$ (B) $\dfrac{1}{2y\sqrt{\ln(xy)}}$ (C) $\dfrac{1}{2x\sqrt{\ln(xy)}}$ (D) $\dfrac{1}{2\sqrt{\ln(xy)}}$

15. 设 $z=x^2+(y-2)\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{y}}$, 那么 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)}=$（ ）.

(A) 2 (B) 1 (C) $\dfrac{\pi}{2}$ (D) $\dfrac{\pi}{4}$

16. 设函数 $z=f\left(3x,\dfrac{x}{y}\right)$, f 具有一阶连续偏导数, 则 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=$ ________.

17. 设产品 A 的需求函数是 $Q_A=14-2P_A+5P_B+\dfrac{1}{10}y$, 其中 P_A,P_B,y 分别为 A,B 产品的价格以及消费者收入. 则当 $P_A=4,P_B=2,y=200$ 时, Q_A 对 P_B 的需求偏弹性为 ________.

18. 商品 A 的销售量 Q_1, 除与它自身的价格 P_1 有关外, 还与商品 B 的价格 P_2 有关： $Q_1=80+7P_1+\dfrac{400}{P_1}-5P_2-P_2^2$, 则 $P_1=20, P_2=2$ 时, Q_1 对 P_1 的偏边际为____________.

19. 设 $z=\mathrm{e}^{2x-3z}+2y$, 则 $3\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=$____________.

20. 设函数 $z=x^2\mathrm{e}^y+y^2\sin x$, 则 $\mathrm{d}z|_{(\pi,0)}=$____________.

21. 设函数 $f(x)=\ln\sqrt{1+x^2+y^2}$, 则 $\mathrm{d}z|_{(1,1)}=$____________.

22. 函数 $\mathrm{e}^z=x^2+y^2-z$, 则 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,1)}=$____________.

23. 已知函数 $f(x+y,x-y)=x^2-y^2$, 则 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}+\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}=$____________.

24. 设 $z=x^2\mathrm{e}^y+y^2\sin x$, 则 $\mathrm{d}z|_{(\pi,0)}=$____________.

25. 设二元函数 $z=\displaystyle\int_1^{xy}\ln t\,\mathrm{d}t$, 则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$____________.

26. 设$f(x,y)=\dfrac{x}{y^2}$, 则$\mathrm{d}f(x,y)|_{x=1,y=1}=$____________.

27. 设 $z=f(3x-2y,xy)$, 且 $f(u,v)$ 可微，则全微分 $\mathrm{d}z=$____________.

28. 设 $z=f(x\ln y,y-x)$, 且 f 具有一阶连续偏导数, 则全微分 $\mathrm{d}z=$____________.

29. 已知函数 $z=\ln\left(1+x^2-y^2\right)$, 则 $\mathrm{d}z|_{(1,1)}=$____________.

30. 函数$z=x^2y+\dfrac{x}{y}$的全微分$dz=$____________.

31. 设函数$z=\mathrm{e}^x\sin y$, 则$\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2=$____________.

32. 函数$z=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{y^2-1}$的定义域是____________.

33. 设 $f(x+y,x-y)=xy+y^2$, 则 $f(y,x)=$____________.

34. 设 $z=y\mathrm{e}^{x+y}$, 则 $\mathrm{d}z=$ ____________.

35. 已知 $f(x,y)=30+2x^2-6y-6xy+6y^2$, 求 $f(x,y)$ 的极值点和极值.

36. 已知 $f(u,v)$ 有连续的偏导数, $z=f(xy,x+\ln y)$, 求全微分 $\mathrm{d}z$.

37. 求函数 $u=xy+2yz$ 在约束条件 $x^2+y^2+z^2=10$ 下的最大值与最小值.

38. 设 $z=f\left(x^2-y^2,\mathrm{e}^{xy}\right)$, 其中 f 具有连续二阶偏导数, 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

39. 求二元函数 $z=\mathrm{e}^{2x}\left(x+y^2+2y\right)$ 的极值.

40. 求二元函数 $z=3x^2-4xy+5y^2-2x-6y+1$ 的极值.

41. 设$x+2y+z-2\sqrt{xyz}=0$,求$\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

42. 设函数 $z=f(x,y)$ 由方程 $\mathrm{e}^z=xyz$ 所确定，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 及 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

43. 求二元函数 $f(x,y)=xy$ 在附加条件 $x+y=1$ 下的极大值.

44. 设函数 $z=f(x,y)$ 由方程 $\mathrm{e}^z=x^3y^2+z$ 所确定, 求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

45. 设二元函数 $f(x,y)=3x+4y-ax^2-2ay^2-2bxy$, 试讨论参数 a,b 满足什么条件时, $f(x,y)$ 有唯一极大值, 或有唯一极小值.

46. 已知f具有二阶连续偏导数, 且 $z=f\left(x^2-y^2,xy\right)$, 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

47. 设 $x^3+y-xyz^5=0$, 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

48. 已知直角三角形斜边长为l, 试求两条直角边等于何值时, 直角三角形的周长最大?

49. 已知f具有二阶连续偏导数, 且$z=f(xy,\dfrac{y}{x})$, 求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

50. 设函数$z=f(x,y)$由方程$x^2+y^2+z^2-4z=0$所确定, 求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

51. 求抛物线$y=x^2$和直线$x-y-2=0$之间的最短距离.

52. 设$z=\arctan(xy)$, 求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

53. [另附] 设$z=\arctan(\dfrac{y}{x})$, 求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

54. 设$z=z(x,y)$由方程$\dfrac{y}{z}=\ln\dfrac{z}{x}$所确定, 求$\mathrm{d}z$.

55. 已知求函数$z=\ln(y+\sqrt{x^2+y^2})$, 求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

56. 若函数 $z=2x^2+2y^2+3xy+ax+by+c$ 在点 $(-2,3)$ 处取得极值 3, 求常数 a,b,c 之积 abc, 并判定该极值是极大还是极小.

57. 某公司通过电视和报纸两种形式做广告, 已知销售收入 R（万元）与电视广告费 x（万元）、报纸广告费 y（万元）关系为:

$$R(x,y)=15+14x+32y-8xy-2x^2-10y^2$$

(1) 广告费不限下, 求最佳广告策略;

(2) 如果广告费为 1.5 万元, 求最佳广告策略.

58. 设 $z=z(x,y)$, 由

$$F\left(x+\frac{z}{y},y+\frac{z}{x}\right)=0$$

给出, 其中 $F(u,v)$ 具有一阶连续偏导数. 证明:

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}+xy=z$$

59. 某工厂生产 A,B 两种产品, 销售单价分别为 10 千元与 9 千元, 生产 x 单位的 A产品与生产 y 单位的 B 产品的总费用

$$W(x,y)=400+2x+3y+0.01\left(3x^2+xy+3y^2\right)\ (\text{千元}).$$

求当产品 A,B 的产量各为多少时, 能使获得的利润最大, 并求最大利润.

60. 设二元函数 $F(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 某邻域内具有二阶连续的偏导数，且

$$F(x_0,y_0)=0,\ F_x(x_0,y_0)=0,\ F_{xx}(x_0,y_0)\cdot F_y(x_0,y_0)\neq 0.$$

证明: 由方程 $F(x,y)=0$ 在 (x_0,y_0) 某邻域内确定的隐函数 $y=y(x)$ 在点 $x=x_0$ 处取得极值.

61. (B班) 设$z=f[x+\varphi(y)]$, 其中f二次可导, φ可导, 证明$\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

62. 设$y=f(x,t)$, 而t是由方程$F(x,y,t)=0$所确定的x, y的函数, 其中f, F都具有一阶连续偏导数, 试证

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial F}{\partial t}-\frac{\partial f}{\partial t}\cdot\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial t}\cdot\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial t}}.$$

第九章　二重积分

1. 与二次积分 $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_{x^2}^{\sqrt{x}} f(x,y)\mathrm{d}y$ 相等的是（　）.

(A) $\int_0^1 \mathrm{d}y \int_{y^2}^{\sqrt{y}} f(x,y)\mathrm{d}x$　　(B) $\int_0^1 \mathrm{d}y \int_{y}^{y^2} f(x,y)\mathrm{d}x$

(C) $\int_0^1 \mathrm{d}y \int_{y^2}^{y} f(x,y)\mathrm{d}x$　　(D) $\int_0^1 \mathrm{d}y \int_{\sqrt{y}}^{y^2} f(x,y)\mathrm{d}x$

2. 设 $f(x,y)$ 是连续函数, 则与二次积分 $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \mathrm{d}x \int_0^{\ln x} f(x,y)\mathrm{d}y$ 相等的是（　）.

(A) $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}y \int_{\mathrm{e}^y}^{\mathrm{e}} f(x,y)\mathrm{d}x$　　(B) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \mathrm{d}y \int_0^{\ln y} f(x,y)\mathrm{d}x$

(C) $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}y \int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^y} f(x,y)\mathrm{d}x$　　(D) $\displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\frac{\mathrm{e}}{\cos\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,\mathrm{d}r$

3. 设函数 $f(t)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续, 则 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_{2\cos\theta}^{2} f\left(r^2\right) r\,\mathrm{d}r =$（　）.

(A) $\displaystyle\int_0^2 \mathrm{d}x \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{x^2+y^2} f\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}y$

(B) $\displaystyle\int_0^2 \mathrm{d}x \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}y$

(C) $\displaystyle\int_0^2 \mathrm{d}y \int_{1+\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \sqrt{x^2+y^2} f\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x$

(D) $\displaystyle\int_0^2 \mathrm{d}y \int_{1+\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x$

4. 设 $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$, 则极坐标系 (r,θ) 中的累次积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}^{1} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\mathrm{d}r$$

可化为直角坐标系 (x,y) 中的累次积分（　）

(A) $\int_0^1 dx \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$ (B) $\int_0^1 dx \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}dy$

(C) $\int_0^1 dx \int_{x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$ (D) $\int_0^1 dx \int_{x}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}dy$

5. 二次积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\cos\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\,dr$ 可以写成 ( ) .

(A) $\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y-y^2}} f(x,y)dx$ (B) $\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$

(C) $\int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)dy$ (D) $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x-x^2}} f(x,y)dy$

6. 设函数 $f(x,y)$ 为连续函数, 二次积分 $\int_0^2 dx \int_x^2 f(x,y)dy$ 交换积分次序后等于 ( )
.

(A) $\int_0^2 dy \int_0^y f(x,y)dx$ (B) $\int_0^1 dy \int_0^y f(x,y)dx$

(C) $\int_0^2 dx \int_y^2 f(x,y)dy$ (D) $\int_0^2 dy \int_0^2 f(x,y)dx$

7. 设函数$f(x,y)$为连续函数, 二次积分 $\int_0^1 dy \int_{y^2}^y f\left(x,y\right)dx$ 交换积分次序后等于 ( )
.

(A) $\int_0^1 dx \int_{x^2}^x f\left(x,y\right)dy$ (B) $\int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{x}} f\left(x,y\right)dy$

(C) $\int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^x f\left(x,y\right)dy$ (D) $\int_0^1 dx \int_x^{x^2} f\left(x,y\right)dy$

8. 设$f(x,y)$为连续函数, 二次积分 $\int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$交换积分次序后等于 ( )

(A) $\int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^x f(x,y)dy$ (B) $\int_0^1 dx \int_{x^2}^x f(x,y)dy$

(C) $\int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{x}} f(x,y)dy$ (D) $\int_0^1 dx \int_x^{x^2} f(x,y)dy$

9. 交换 $\int_{\frac{1}{2}}^1 dx \int_{\frac{1}{x}}^1 f(x,y)\,dy + \int_1^2 dx \int_x^1 f(x,y)\,dy$ 的次序, 则下列结果正确的是 ( )
.

(A) $\int_{1}^{2} \mathrm{d}y \int_{\frac{1}{y}}^{y} f(x,y)\,\mathrm{d}x$ (B) $\int_{1}^{2} \mathrm{d}y \int_{y}^{\frac{1}{y}} f(x,y)\,\mathrm{d}x$

(C) $\int_{1}^{3} \mathrm{d}y \int_{\frac{1}{x}}^{x} f(x,y)\,\mathrm{d}x$ (D) $\int_{\frac{1}{3}}^{1} \mathrm{d}y \int_{x}^{\frac{1}{x}} f(x,y)\,\mathrm{d}x$

10. 设区域 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 2\}$, 则二重积分$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=$____________.

11. 设区域 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$, 则二重积分 $\iint_D \mathrm{e}^{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=$____________.

12. 积分 $\int_0^2 \mathrm{d}x \int_x^2 \mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y$ 的值等于____________.

13. 交换二次积分$\int_{-1}^{0} \mathrm{d}x \int_{0}^{1+x} f(x,y)\mathrm{d}y + \int_{0}^{1} \mathrm{d}x \int_{0}^{1-x} f(x,y)\mathrm{d}y=$
____________.

14. 设区域 $D=\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4, y\ge 0\}$, 则 $\iint_D \dfrac{x+y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=$____________.

15. 若 D 是由 $|x|\le 1, |y|\le 1$ 围成的正方形区域, 则 $\iint_D x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=$____________.

16. 二重积分 $\iint_{x^2+y^2\le 1} \mathrm{e}^{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=$____________.

17. 已知$f(x,y)=xy+2\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中$D=\{(x,y)|0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$, 且$f(x,y)$连续, 则$f(x,y)=$____________.

18. 二重积分$\int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} f(\arctan\dfrac{y}{x})\mathrm{d}y$在极坐标系中表示为____________.

19. 已知$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}$, 则$\iint_D f(x)f(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=$____________,其中$D=\{(x,y)|0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$.

20. $D: x^2+y^2\le 1$, 则 $\iint_D \mathrm{e}^{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\sigma=$____________.

21. 计算二重积分$\iint_D x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 D 是由圆 $x^2+y^2=1, x^2+y^2=4$ 及直线 $y=0$, $y=\sqrt{3}x$ 所围成的在第一象限内的有界闭区域.

22. 计算二重积分$\iint_D x\sin y^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 D 是由直线 $y=x$, $y=1$ 和 y 轴所围成的有界闭区域.

23. 求由曲线 $y=\mathrm{e}^{2x}, y=\mathrm{e}^{-2x}, x=1$ 所围成图形的面积A, 以及该图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积V.

24. 计算二重积分 $\displaystyle\iint_D \frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}d\sigma$, 其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=1$ 及直线 $x=0, y=0$ 所围成的在第一象限内的闭区域.

25. 已知由曲线 $y=x^2-2x, y=0, x=1, x=3$ 所围成的平面图形 D,

(1)求平面图形 D 的面积 S;

(2)求平面图形 D 绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积 V_y.

26. 计算二重积分 $\displaystyle\iint_D \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, D 是由直线 $y=x$ 及抛物线及 $y=x^2$ 围成的区域.

27. 计算二重积分 $\displaystyle\iint_D \arctan\frac{y}{x}\,\mathrm{d}\sigma$, D 是由圆周 $x^2+y^2=1, x^2+y^2=4$ 及直线 $y=0$, $y=x$ 所围成的在第一象限内的闭区域.

28. 已知由 x 轴、曲线 $y=x^2$ 及其在 $(1,1)$ 处的切线所围成平面图形为 D,
(1) 求平面图形 D 的面积;
(2) 求平面图形 D 绕 x 轴旋转一周所成旋转体体积.

29. 计算二重积分 $\displaystyle\iint_D \frac{xy}{\sqrt{1+y^3}}\mathrm{d}\sigma$, 其中 D 是由 $x=\sqrt{y}$, $x=0$ 与 $y=1$ 所围成的区域.

30. 计算二重积分 $\displaystyle\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\sigma$, 其中 $D=\left\{(x,y)\mid x\le x^2+y^2\le 1, y\ge 0\right\}$.

31. 计算二重积分 $\displaystyle\iint_D xy\;\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中$D$是由直线$y=2, y=x$, $y=2x$所围成的面积.

32. 计算二重积分$\iint_D \frac{dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{4-(x^2+y^2)}}$, 其中$D=\{(x,y)|1\le x^2+y^2\le 2\}$.

33. 计算二重积分 $\iint_D y e^{\frac{x}{y}}\,dx\,dy$ ，其中区域 D 由直线 $y=x, x=0, y=1$ 围成.

34. 计算二重积分 $\iint_D \cos\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$, 其中 D 为环形域 $\pi^2\le x^2+y^2\le 4\pi^2$.

35. 计算二重积分 $\iint_D (x^2+y)\,dx\,dy$, 其中 D 由曲线 $y=x^2$ 与 $x=y^2$ 围成.

36. 计算二重积分$\iint_D \ln\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$, 其中$D$为环形域$1\le x^2+y^2\le e^2$.

37. 计算二重积分$\iint_D \frac{y}{1+x^6}\,dx\,dy$, 其中$D=\{(x,y)|0\le y\le x, 0\le x\le 1\}$.

38. 计算二重积分$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$, 其中$D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1, 0\le y\le x\}$.

39. 计算二重积分$\iint_D \sin\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$, 其中$D$为环形域$\pi^2\le x^2+y^2\le 4\pi^2$.

40. 计算二重积分 $\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$, 其中 $D: x^2+y^2\leqslant 2x$.

41. 计算二重积分 $\int_0^1 dx\int_{\sqrt{x}}^1 \sin y^3\,dy$.

第十章　微分方程与差分方程

1. 差分方程 $y_x+5y_{x-1}=0$ 满足初值条件 $y_0=3$ 的特解是（　）.

(A) $3\left(\frac{1}{5}\right)^x$　(B) $3\left(-\frac{1}{5}\right)^x$　(C) $3(-5)^x$　(D) $3(5)^x$

2. 满足微分方程 $y''-y'-12y=0$, $y\big|_{x=0}=2$, $y'\big|_{x=0}=1$ 的特解是（　）.

(A) $y=\mathrm{e}^{3x}+\mathrm{e}^{4x}$　(B) $y=\mathrm{e}^{3x}+\mathrm{e}^{-4x}$　(C) $y=\mathrm{e}^{-3x}+\mathrm{e}^{-4x}$　(D) $y=\mathrm{e}^{-3x}+\mathrm{e}^{4x}$

3. 满足微分方程 $9y''-6y'+y=0$, $y|_{x=0}=1$, $y'|_{x=0}=\frac{4}{3}$ 的特解是（　）.

(A) $y=(1-x)\mathrm{e}^{\frac{x}{3}}$　(B) $y=1+x\mathrm{e}^{\frac{x}{3}}$　(C) $y=(1+x)\mathrm{e}^{\frac{x}{3}}$　(D) $y=\mathrm{e}^{\frac{x}{3}}$

4. 微分方程 $y''-4y'=0$ 的通解为 $y=$（　）.

(A) $C_1\mathrm{e}^{2x}+C_2\mathrm{e}^{-2x}$　(B) $C_1+C_2\mathrm{e}^{-4x}$　(C) $C_1\mathrm{e}^{4x}+C_2\mathrm{e}^{-4x}$　(D) $C_1+C_2\mathrm{e}^{4x}$

5. 下列一阶微分方程中, 属于齐次方程的是（　）.

(A) $\left(xy-y^2\right)\mathrm{d}x=\left(x^2-2xy\right)\mathrm{d}y$　(B) $(x+y)y'=\ln(x+y)$

(C) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x\sin y$　(D) $y'+\frac{1}{x}y=\mathrm{e}^x$

6. 一阶常系数齐次线性差分方程 $2y_{x+1}-3y_x=0$ 的通解是（　）.

(A) $y_x=C\left(\frac{2}{3}\right)^x$　(B) $y_x=C\left(-\frac{2}{3}\right)^x$　(C) $y_x=C\left(\frac{3}{2}\right)^x$　(D) $y_x=C\left(-\frac{3}{2}\right)^x$

7. 微分方程 $(x+y)\mathrm{d}y=x\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\mathrm{d}x$ 是（　）

(A) 可分离变量微分方程　(B) 一阶线性非齐次方程

(C) 齐次方程　(D) 前面三种都不是

8. 微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y}{x}+\tan\frac{y}{x}$ 的通解是（　）.

(A) $\sin\frac{y}{x}=\frac{1}{Cx}$　(B) $\sin\frac{y}{x}=x+C$　(C) $\sin\frac{x}{y}=Cx$　(D) $\sin\frac{y}{x}=Cx$

9. 函数 $y=\cos x$ 是下列哪个微分方程的解（　）.

(A) $y'+y=0$　　(B) $y'+2y=0$　　(C) $y''+y=0$　　(D) $y''+y=\cos x$

10. 若函数 $y=e^{-x}$ 是方程 $y''+ay'-2y=0$ 的一个解，则 a 值等于（　）.

(A) 0　　(B) 1　　(C) -1　　(D) 2

11. 微分方程 $y''+4y=\cos 2x$ 的特解形式为（　）.

(A) $y=A\cos 2x$　　(B) $y=A\sin 2x$

(C) $y=A\sin 2x+B\cos 2x$　　(D) $y=x(A\sin 2x+B\cos 2x)$

12. 若函数$y_1=e^{2x}$, $y_2=e^{-x}$是二阶常系数齐次线性微分方程$y''+py'+qy=0$的两个特解，则p,q的值分别等于（　）.

(A) $-1,-2$　　(B) $-1,2$　　(C) $1,-2$　　(D) $1,2$

13. 微分方程$y''-2y'+2y=0$的通解为（　）.

(A) $y=e^{-x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$　　(B) $y=e^{x}(C\cos x+\frac{1}{2}C\sin x)$

(C) $y=e^{x}(C\sin x+\cos x)$　　(D) $y=e^{x}(C_1\sin x-C_2\cos x)$

14. 微分方程$y''+e^{x}(y')^2=0$ 满足条件$y(0)=1$, $y'(0)=1$的解是（　）.

(A) $y=\dfrac{1}{2}(e^{x}+1)$　　(B) $y=\dfrac{1}{2}(e^{-x}+1)$　　(C) $y=2-e^{-x}$　　(D) $y=2e^{-x}-1$

15. 若函数$y=\cos\omega x$是方程$\dfrac{d^2y}{dx^2}+9y=0$的解，则ω的值等于（　）.

(A) ±1　　(B) ±2　　(C) ±3　　(D) ±4

16. 微分方程$y''-5y'+6y=0$的通解为（　）.

(A) $y=C_1e^{-2x}+C_2e^{-3x}$　　(B) $y=C_1e^{2x}-C_2e^{3x}$

(C) $y=e^{2x}-e^{3x}$　　(D) $y=e^{2x}+e^{3x}$

17. 微分方程 $\dfrac{d^2y}{dx^2}+\omega^2y=0$ 的通解是（其中 c,c_1,c_2 均为任意常数）（　）.

(A) $y=c\cos\omega x$　　(B) $y=c\sin\omega x$

(C) $y=c_1\cos\omega x+c_2\sin\omega x$　　(D) $y=\cos\omega x+\sin\omega x$

18. 差分方程 $\Delta^2 y_x+y_x+1=0$ 的阶是____________.

19. 差分方程 $3\Delta y_x+y_x=0$ 满足初值条件 $y_0=2$ 的特解为 $y_x=$____________.

20. 二阶常系数齐次线性微分方程 $y''+y'+y=0$ 的通解为 ____________.

21. 微分方程 $\frac{\mathrm{d}x}{y}+\frac{\mathrm{d}y}{x}=0$ 满足 $y\big|_{x=3}=4$ 的特解是 ____________.

22. 微分方程 $y'\sin x=y\cos x\ln y$ 且满足 $y\big|_{x=\frac{\pi}{2}}=\mathrm{e}$ 的解是 ____________.

23. 微分方程 $y'''-x^2y''-x^5=1$ 的通解中应含有独立常数个数为____________.

24. 方程 $y''=\sin x$ 的通解为____________.

25. 方程$y''+y=x\cos 2x$的特解形式为 ____________.

26. 微分方程$y'=xy''$的通解为 ____________.

27. 方程$y''-2y=\mathrm{e}^x$的特解形式为____________.

28. 微分方程 $(1+x)y'+1=2\mathrm{e}^{-y}$ 的通解为 ____________.

29. 求一阶非齐次线性微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-3y=\mathrm{e}^{3x}$ 的通解.

30. 某电动车厂家在长期运营中发现每辆电动车的总维修费用 y 对车辆检修时间间隔 x 的变化率为 $\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}y$. 已知检修时间间隔 $x=1$（年）时, 总维修费用为 $y=3$（百元）. 试确定 x 与 y 的函数关系.

31. 求微分方程 $y'-\frac{2}{x}y=x^2$ 满足条件 $y\big|_{x=1}=3$ 的特解.

32. 求微分方程 $y'+y\cos x=(\ln x)\mathrm{e}^{-\sin x}$ 满足 $y\big|_{x=\pi}=\ln\pi$ 的特解.

33. 求微分方程 $\left(x^2-1\right)y'+2xy-\cos x=0$ 的通解.

34. 求微分方程 $y^2+x^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=xy\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 的通解.

35. 求微分方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-2y=\mathrm{e}^x+x$的通解.

36. 求微分方程 $xy'-y=1+x^3$ 的通解.

37. 求微分方程 $\left(y^2-2x^2\right)\mathrm{d}x+2xy\,\mathrm{d}y=0$ 满足初始条件 $y\big|_{x=1}=1$ 的特解.

38. 求微分方程 $y''-3y'+2y=x\mathrm{e}^{2x}$ 的通解.

39. 求微分方程 $xy\,\mathrm{d}x+\left(x^2+1\right)\mathrm{d}y=0$ 满足初值条件 $y\big|_{x=0}=1$ 的特解.

40. 求微分方程$(x^2+3y^2)\mathrm{d}x-2xy\,\mathrm{d}y=0$的通解.

41. 求微分方程$(y^2-6x)y'+2y=0$的通解.

42. 求微分方程$y''-4y'+4y=\mathrm{e}^{2x}$的通解.

43. 求方程$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{\sin x}{x}$的通解.

44. 求微分方程 $y'=\dfrac{y}{x}(1+\ln y-\ln x)$ 的通解.

第十一章　无穷级数

1. 下列级数中收敛的是（　）.

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n-1}{3n}$　　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2}{3^n}$　　(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$　　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n-1}{2^n}$

2. 下列级数收敛的是（　）.

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n+1}{2n}$　　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2+n}$　　(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{2})^n$　　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{0.99}}$

3. $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$ 是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛的（　）.

(A) 充分条件　　(B) 必要条件　　(C) 充要条件　　(D) 无关条件

4. 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-3)^n}{n\cdot 3^n}$ 的收敛域为（　）.

(A) $(0,6)$　　(B) $[0,6]$　　(C) $(0,6]$　　(D) $[0,6)$

5. 正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的前 n 项部分和数列 $\{S_n\}$ 有界是该级数收敛的（　）条件.

(A) 必要非充分　　(B) 充分非必要　　(C) 充要　　(D) 无关

6. 下列函数（　）展开为 x 的幂级数是 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^n}{2^{n+1}}$，$x\in(-2,2)$.

(A) $f(x)=\dfrac{1}{x+2}$　　(B) $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$　　(C) $f(x)=\dfrac{1}{2x+1}$　　(D) $f(x)=\dfrac{1}{2-x}$

7. 以下四个关于级数的结论中，正确的结论是（　）

(A) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n^2$ 都收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)^2$ 收敛.

(B) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n v_n|$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n^2$ 都收敛.

(C) 若正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散，则 $u_n\geq\dfrac{1}{n}$.

(D) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，且 $u_n\geq v_n\ (n=1,2,\cdots)$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 也收敛.

8. 设a为常数,则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin a}{n^2}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ (　　).

(A) 绝对收敛　　(B) 发散

(C) 条件收敛　　(D) 收敛性取决于a的值

9. 若正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 满足关系 $a_n \le b_n$, 则 (　　).

(A) 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 也收敛　　(B) 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛

(C) 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛　　(D) 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 也发散

10. 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 是正项级数, 且 $u_n > v_n (n=1,2,\cdots,99)$, $u_n \le v_n (n=100,101,\cdots)$, 则下列命题正确的是 (　　).

(A) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛　　(B) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散

(C) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散　　(D) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛， 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散

11. 设$0 < u_n < \frac{1}{n} (n=1,2,\cdots)$, 则下列级数中一定收敛的是 (　　).

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$　　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$　　(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{u_n}$　　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n^2$

12. 设级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$收敛, 则下列级数中必定发散是 (　　).

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$　　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^2$　　(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$　　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{u_n}$

13. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, 则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ (　　).

(A) 一定收敛, 其和为零　　(B) 一定收敛, 但和不一定为零

(C) 一定发散　　(D) 可能收敛, 也可能发散

14. 下列级数中收敛的是 (　　).

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n+1}$　　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n(n+2)}$

(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n}$　　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(n+1)(n+3)}$

15. 将函数 $y=\sin 2x$ 展开成 x 的幂级数, 其中 x^3 的系数为 ____________.

16. 设幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为4, 则幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 3{a_n}^2 x^n$ 的收敛半径 $R=$____________.

17. 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n}}{n}$ $(|x|<1)$的和函数$f(x)=$____________.

18. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{5-x}$ $(-1<x<5)$ 展开成 $x-2$ 的幂级数是____________.

19. 已知 $a>1$, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\pi}{a^n}$ 的和为 ____________.

20. 设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x+1)^n$ 的收敛域是 $(-4,2]$, 则幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n(x-2)^n$ 的收敛区间是____________.

21. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\dfrac{1}{4}$, 则幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n}$的收敛半径$R=$____________.

22. 实数 q 满足什么条件，几何级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$ 收敛，即 q 满足 ____________.

23. 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^n}{2^n}$, $|x|<2$ 的和函数是____________.

24. 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n n}x^n$ 的收敛半径为____________.

25. 幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2^n\cdot n}(x-1)^n$的收敛域为 ____________.

26. 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+2)}$的和$S=$____________.

27. 设幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}x^n$的收敛域为____________.

28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$ 当p满足条件____________时收敛.

29. 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)x^{n+1}$, 求该幂级数的收敛域及和函数.

30. 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)x^{n}$的收敛域及和函数.

31. 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ 收敛.

32. 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\dfrac{x^{n}}{n}$, 求该幂级数的收敛域及和函数.

33. 若正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛, 证明: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n\sin n$ 绝对收敛.

34. 判定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}\right)$ 敛散性; 若收敛, 说明是绝对收敛还是条件收敛.

35. 判定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{n\pi}{2}$ 敛散性, 若收敛, 说明是绝对收敛还是条件收敛.

36. 求幕级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}nx^{n+1}$ 的收敛域及和函数.

37. 已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛, $a_n>0$, 求证: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{n}$ 也收敛.

38. 判定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{\ln(1+n)}$ 敛散性，若收敛，指出其是绝对收敛还是条件收敛.

39. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{2^n\cdot n}$ 的收敛域及和函数.

40. 求幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+2}$的和函数及收敛域.

41. (B班)将函数$f(x)=\dfrac{1}{5-x}$展开为$(x-1)$的幂级数,并求其收敛域.

42. (A班) 将函数$f(x)=\dfrac{1}{x^2+3x+2}$展开为$(x-1)$的幂级数,并求其收敛域.

43. 级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\sin\left(n\pi+\dfrac{1}{\ln n}\right)$是绝对收敛，条件收敛，还是发散？

44. 求幂级数 $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n}(x-1)^n$ 的收敛域.

45. 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\frac{n+1}{n}$ 的敛散性.

46. 将函数 $f(x)=\ln x$ 展开成 $(x-2)$ 的幂级数.

47. 判断级数$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{b}{a_n})^n$的敛散性, 其中 $\lim_{n\to\infty}a_n=a$, $(a>0,\ b>0)$.

48. 将函数$f(x)=\frac{1}{x^2+4x+3}$展开成$(x-1)$的幂级数.

49. 讨论级数$\sum_{n=}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{a^n}(a>0)$是绝对收敛, 条件收敛, 还是发散.

50. 试求幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$的收敛域$I$与和函数$S(x)$, 并求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2^n}$的和.

51. [另附] 试求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}nx^n$的收敛域I与和函数$S(x)$, 并求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$的和.

52. 判断级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n+1}}$绝对收敛和条件收敛性.

53. 将函数$f(x)=\frac{1}{x^2+3x+2}$展开成$(x+4)$的幂级数.

54. 判别 $\sum_{n=1}^{\infty}n\sin\frac{\pi}{4^n}$ 的敛散性.

55. 判别$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{2}{n}\right)$的敛散性.

56. 判别$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi}{n+1}$是否收敛, 若收敛说明是条件收敛还是绝对收敛.

57. 证明：级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}\sin\frac{2n}{\pi}$ 收敛.

58. (A班) 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n}=0$.

59. 设级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$收敛, 证明级数$\sum\limits_{n=}^{\infty}\dfrac{u_n}{n}$绝对收敛.

60. [另附] 设级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛, 证明级数$\sum\limits_{n=}^{\infty}\dfrac{u_n}{n^2}$绝对收敛.