

# 微积分题汇编（下）

2026年03月更新



# 目录

第六章 定积分及其应用	1
第七章 向量代数与空间解析几何	11
第八章 多元函数微分学	13
第九章 二重积分	21
第十章 微分方程与差分方程	27
第十一章 无穷级数	33



## 第六章 定积分及其应用

1. 下列定积分或广义积分等于 0 的是 ( C ).

$$\begin{array}{ll} \text{(A)} \int_{-1}^1 \frac{1}{x^7} dx & \text{(B)} \int_{-1}^1 \frac{|x|}{1+x^4} dx \\ \text{(C)} \int_{-1}^1 x^3 \sqrt{1-x^2} dx & \text{(D)} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin x dx \end{array}$$

2. 下列反常积分发散的是 ( D ).

$$\text{(A)} \int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln^2 x} dx \quad \text{(B)} \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \quad \text{(C)} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad \text{(D)} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sin x} dx$$

3. 设  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上连续, 且  $x$  是  $[a, b]$  上任意一点, 下列等式错误的是 ( B )

$$\begin{array}{ll} \text{(A)} \frac{d}{dx} \int_x^b f(t) dt = -f(x) & \text{(B)} \frac{d}{dx} \int_a^b f(x) dx = f(x) \\ \text{(C)} \frac{d}{dx} \int_a^b f(x) dx = 0 & \text{(D)} \frac{d}{dx} \int f(x) dx = f(x) \end{array}$$

4. 下列式子正确的是 ( A ).

$$\begin{array}{ll} \text{(A)} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} & \text{(B)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} dx = 0 \\ \text{(C)} \int_0^1 \frac{1}{x} dx = 0 & \text{(D)} \int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx = -2 \end{array}$$

5. 设函数  $f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上连续且不恒等于零, 则下列各式中不恒为常数的是 ( D )

$$\text{(A)} f(b) - f(a) \quad \text{(B)} \int_a^b f(x) dx \quad \text{(C)} \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \quad \text{(D)} \int_a^x f(t) dt$$

6. 下列选项中是广义积分的是 ( B ).

$$\text{(A)} \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx \quad \text{(B)} \int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx \quad \text{(C)} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad \text{(D)} \int_{-1}^1 e^{-x} dx$$

7. 定积分  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| \frac{1}{2} - \sin x \right| dx = (A)$ .

- (A)  $\sqrt{3} - 1 - \frac{\pi}{12}$       (B)  $\frac{\pi}{4} - 1$       (C)  $1 - \frac{\pi}{4}$       (D) 0

8. 设  $f(x)$  为连续函数, 且  $I(u) = \int_a^u f(x) dx - \int_a^u f(t) dt$ ,  $a < u < b$ , 则  $I(u)$  (C)

- (A) 恒大于零      (B) 恒小于零      (C) 恒等于零      (D) 可正, 可负

9. 下列不等式中, 成立的是 (B).

- (A)  $\int_1^e \ln^2 x dx > \int_1^e \ln x dx$       (B)  $\int_e^{e^2} \ln^2 x dx > \int_e^{e^2} \ln x dx$   
(C)  $\int_1^{+\infty} x^3 dx > \int_1^{+\infty} x^2 dx$       (D)  $\int_{-1}^{-2} x^4 dx > \int_{-1}^{-2} x^3 dx$

10. 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 则对任意  $x \in [a, b]$ , 下列式子正确的是 (C).

- (A)  $\frac{d}{dx} \int_a^b f(x) dx = f(x)$       (B)  $\frac{d}{dx} \int_x^b f(x) dx = f(x)$   
(C)  $\frac{d}{dx} \int_a^x f(x) dx = f(x)$       (D)  $\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(t)$

11. 设  $I_1 = \int_3^4 \ln x dx$ ,  $I_2 = \int_3^4 (\ln x)^3 dx$ , 则  $I_1$  与  $I_2$  的大小关系是 (C).

- (A)  $I_1 = I_2$       (B) 不能确定      (C)  $I_1 < I_2$       (D)  $I_1 > I_2$

12. 设函数  $f(x)$  为连续偶函数,  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ , 则  $F(-x) = (C)$ .

- (A) 0      (B)  $F(x)$       (C)  $-F(x)$       (D) 非零常数

13. [另附] 设函数  $f(x)$  为连续奇函数,  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ , 则  $F(-x) = (B)$ .

- (A) 0      (B)  $F(x)$       (C)  $-F(x)$       (D) 非零常数

14. 设  $I_1 = \int_1^2 x^2 dx$ ,  $I_2 = \int_1^2 x^4 dx$ , 则  $I_1$  与  $I_2$  的大小关系是 (C).

- (A)  $I_1 = I_2$       (B) 不能确定      (C)  $I_1 < I_2$       (D)  $I_1 > I_2$

15.  $\int_{-5}^5 \frac{x^2 \sin^3 x}{1+x^4} dx = \underline{0}$ .

16. 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} t^2 \ln(1+t) dt}{x^8} = \underline{\frac{1}{4}}$ .

17. 广义积分  $\int_0^{+\infty} e^{-5x} dx = \underline{\frac{1}{5}}$ .

18. 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{2x} \ln(1+t^3) dt}{\sin^4 x} = \underline{4}$ .

19. 反常积分  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+6x+10} dx$  的敛散性是 收敛 (填"收敛"或"发散").

20. 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} \ln \cos t dt}{x^2} = \underline{0}$ .

21.  $\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x} dx = \underline{1}$ .

22. 极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \arctan t dt}{x^2} = \underline{\frac{1}{2}}$ .

23. 由  $y = x^3$ ,  $y = 0$  及  $x = 1$  所围图形绕  $y$  轴旋转所得旋转体的体积是  $\frac{2}{5}\pi$ .

24. 设  $f(x)$  为连续函数, 且  $\int_0^x f(t) dt = x^3 + \ln(x+1)$ , 则  $f(x) = \underline{3x^2 + \frac{1}{x+1}}$ .

25.  $\int_{-1}^1 (x^3 \cos x + 1) dx = \underline{2}$ .

26. 设  $F(x) = \int_{x^2}^0 t e^{-t} dt$ , 则  $F'(x) = \underline{-2x^3 e^{-x^2}}$ .

27.  $\int_{-1}^1 \left( x^2 \tan x - \frac{1}{1+x^2} \right) dx = \underline{-\frac{\pi}{2}}$ .

28. 反常积分  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x(1+\ln^2 x)} dx = \underline{\frac{\pi}{2}}$ .

29. 曲线  $y = 2x^2$  与直线  $y = 4x$  围成平面图形的面积为  $\underline{\frac{8}{3}}$ .

30. 反常积分  $\int_0^{+\infty} e^{-5x} dx = \underline{\frac{1}{5}}$ .

31. 设函数  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上连续, 且  $\int_0^{x^2} f(t) dt = x^4$ , 则  $f(x) = \underline{2x}$ .

32. 设  $y = \int_0^{x^3} \sqrt{1+t^2} dt$ , 则  $\frac{dy}{dx} = \underline{3x^2 \sqrt{1+x^6}}$ .

33. 若  $\int_x^{2\ln 2} \frac{dt}{\sqrt{e^t-1}} = \frac{\pi}{6}$ , 求  $x$ .

参考答案:  $x = \ln 2$

34. 设

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x^2}, & x \geq 0, \\ \frac{1}{1+e^{-x}}, & x < 0, \end{cases}$$

求  $\int_{-\infty}^2 f(x-1) dx$ .

参考答案:  $\ln 2 + \frac{\pi}{4}$

35. 求由曲线  $y = e^x$ ,  $y$  轴及该曲线过原点的切线所围成的图形面积和该图形绕  $x$  轴旋转一周所形成的立体体积.

参考答案:  $S = \frac{e}{2} - 1, \quad V = \frac{\pi}{6} e^2 - \frac{\pi}{2}$

36. 求定积分  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin 2x dx$ .

参考答案:  $\frac{\pi}{4}$ .

37. 求由曲线  $y = 2\cos(3x)$ ,  $x \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$  与  $x$  轴围成的图形的面积  $S$  以及该平面图形绕  $x$  轴旋转一周所得旋转体的体积  $V_x$ .

参考答案:  $S = \frac{4}{3}$ ,  $V_x = \frac{2\pi^2}{3}$ .

38. 求定积分  $\int_0^{\pi} x \sin x dx$ .

参考答案:  $\pi$

39. 已知  $f(x)$  具有一阶连续导数, 且  $\int_0^2 f(x) dx = 4$ ,  $f(2) = 3$ , 求定积分  $\int_0^2 x f'(x) dx$ .

参考答案: 2

40. 在曲线  $y = e^x$  上点  $(1, e)$  处作一切线  $L$ , 试求:

(1) 切线  $L$  的方程;

(2) 由曲线  $y = e^x$ 、切线  $L$  以及  $y$  轴所围图形的面积  $A$ ;

(3) 上述所围平面图形绕  $x$  轴旋转一周所成旋转体的体积  $V$ .

参考答案:  $y = ex$ ,  $\frac{1}{2}e - 1$ ,  $\pi \left( \frac{e^2}{6} - \frac{1}{2} \right)$ .

41. 计算定积分  $\int_0^2 x^2 \sqrt{4-x^2} dx$ .

参考答案:  $\pi$ .

42. 计算极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{2x} \sin t dt}{\ln(1+x^2)}$ .

参考答案: 2.

43. 计算定积分  $\int_0^4 \cos(\sqrt{x}-1) dx$ .

参考答案:  $4 \sin 1$ .

44. (A班) 设  $f(x)$  在区间  $[0, 1]$  上连续, 在区间  $(0, 1)$  上大于零, 并满足  $xf'(x) - f(x) = \frac{3a}{2}x^2$  ( $a$  为常数), 且假设  $y = f(x)$  与  $x = 1, y = 0$  所围成的图形  $S$  的面积为 2. 求:

(1)  $f(x)$ ;

(2) 当  $a$  为何值时, 图形  $S$  绕  $x$  轴旋转一周所得旋转体体积最小? 其最小体积为多少?

参考答案:  $f(x) = \frac{3}{2}ax^2 + (4-a)x$ ; 当  $a = -5$  时, 旋转体体积最小, 此时最小体积为  $V(-5) = \frac{9}{2}\pi$ .

45. (B班) 设函数  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上有连续二阶导数且满足方程:

$$xf'(x) = f(x) + 140x^6.$$

(1) 求  $f(x)$  的表达式;

(2) 是否存在函数  $f(x)$ , 它在开区间  $(0, 1)$  上大于零, 并满足上面的方程, 且曲线  $y = f(x)$  ( $x \in [0, 1]$ ) 与直线  $x = 1, y = 0$  所围成的图形  $D$  的面积为 2? 请说明理由.

参考答案:  $f(x) = 28x^6 + Cx$ ; 不存在这样的函数.

46. 计算定积分  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{\cos x}{2 + \sin x} + x^3 \cos x \right) dx$ .

参考答案:  $\ln 3$ .

47. 计算定积分  $I = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ .

参考答案:  $1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

48. 过点  $(1, 2)$  作抛物线  $y = x^2 + 1$  的切线, 设该切线与抛物线及  $y$  轴所围的平面区域为  $D$ .

(1) 求  $D$  的面积  $A$ ;

(2) 求  $D$  绕  $x$  轴一周的旋转体体积  $V_x$ .

参考答案:  $S = \frac{1}{3}, V_x = \frac{8}{15}\pi$ .

49. 计算定积分  $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx$ .

参考答案:  $\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$ .

50. 设函数曲线  $y = \ln x$ , 试求:

- (1) 曲线上  $x = e$  处的切线方程;  
 (2) 曲线与切线以及  $x$  轴所围成的图形的面积;  
 (3) 该图形绕  $x$  轴旋转所得的旋转体的体积.

参考答案: 切线方程为:  $y - 1 = \frac{1}{e}(x - e)$ ,  $S = \frac{1}{2}(e - 2)$ ,  $V_x = \frac{6 - 2e}{3}\pi$ .

51. 计算定积分  $\int_0^1 x^2 \sqrt{1 - x^2} dx$ .

参考答案:  $\frac{\pi}{16}$ .

52. 计算定积分  $\int_1^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$

参考答案:  $4 - 2\sqrt{e}$ .

53. 计算定积分  $\int_0^1 x^2 \sqrt{1 - x^2} dx$ .

参考答案:  $\frac{\pi}{16}$ .

54. 计算定积分  $\int_{-2}^4 |x^2 - 2x - 3| dx$ .

参考答案:  $\frac{46}{3}$ .

55. 计算定积分  $\int_1^{16} \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}}$  (提示: 令  $t = \sqrt[4]{x}$ ,  $x = t^4$ ,  $dx = 4t^3 dt$ )

参考答案:  $2 + 4 \ln \frac{3}{2}$

56. 计算反常积分  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 5}$ .

参考答案:  $\frac{\pi}{8}$ .

57. 设平面图形由曲线  $y = e^x$ , 直线  $y = ex$ ,  $x = 0$  围成. 试求:

- (1) 该图形的面积;  
 (2) 该图形绕  $x$  轴旋转而成的旋转体体积.

参考答案:  $\frac{1}{2}e-1, \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{3}e^2-1\right)$ .

58. 计算定积分  $\int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$ .

参考答案: 2.

59. 计算定积分  $\int_{\frac{1}{e}}^e |\ln x| dx$ .

参考答案:  $2\left(1-\frac{1}{e}\right)$ .

60. 求曲线  $y = \ln x$  在区间  $(2, 6)$  内的一条切线, 使得该切线与直线  $x = 2, x = 6$  和该曲线所围成的平面图形的面积最小.

参考答案: 切线方程为  $y = \frac{1}{4}x - 1 + \ln 4$ .

61. 设  $u = \sin(xy^2) + x$ , 试求  $u_x, u_y$ .

参考答案:  $u_x = y^2 \cos(xy^2) + 1, u_y = 2xy \cos(xy^2)$ .

62. 设  $u(x, y, z) = \frac{z}{x^2 + y^2}$ , 试求  $du$ .

参考答案:  $du = \frac{-2z(x dx + y dy) + (x^2 + y^2) dz}{(x^2 + y^2)^2}$ .

63. 某企业的一种产品在甲乙两地的需求函数分别是  $Q_1 = 19 - 0.1p_1, Q_2 = 44 - 0.4p_2$  (其中  $p_1, p_2$  分别表示甲、乙两地的市场价格,  $Q_1, Q_2$  分别表示甲、乙两地的需求量). 已知生产该产品的总成本函数为  $150 + 10Q_1 + 10Q_2$ . 试问: 应如何确定甲、乙两地的市场价格, 能使企业利润最大?

参考答案:  $(p_1, p_2) = (100, 60)$  时利润最大.

64. 设函数  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上连续, 在  $(0, 1)$  内可导, 且  $f(0) = 0, 0 < f'(x) < 1 (0 < x < 1)$ . 证明:  $\left(\int_0^1 f(x) dx\right)^2 > \int_0^1 f^3(x) dx$ .

参考答案: 略.

65. 设函数  $f(x)$  在闭区间  $[0, 1]$  上连续, 证明:

$$\int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx.$$

参考答案: 略.

66. 设函数  $f(x)$  在闭区间  $[0, 1]$  上连续, 证明:

$$\int_0^1 dx \int_0^x f(t) dt = \int_0^1 (1-x)f(x) dx$$

参考答案: 略

67. 设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内可导, 且  $f'(x) < 0$ , 证明函数

$$F(x) = \frac{1}{x-a} \int_a^x f(t) dt$$

在  $(a, b)$  单调递减.

参考答案: 由  $F'(x) < 0$  易得.

68. 设函数  $f(x)$  为连续函数, 验证:  $\int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx$ . 并利用此结

果计算积分  $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$ .

参考答案:  $\frac{\pi^2}{4}$ .



## 第七章 向量代数与空间解析几何

1. 在空间直角坐标系中, 方程  $x^2 + y^2 + z^2 = 2x$  表示 ( B ).  
(A) 柱面                      (B) 球面                      (C) 平面                      (D) 抛物面
2. 方程  $x^2 + y^2 - 2z^2 = 9$  表示的三维空间中图形是 ( B ).  
(A) 球面                      (B) 旋转曲面                      (C) 平面                      (D) 柱面
3. 点  $(4, -3, 5)$  到  $oy$  轴的距离为 ( D ).  
(A)  $\sqrt{4^2 + (-3)^2 + 5^2}$    (B)  $\sqrt{(-3)^2 + 5^2}$    (C)  $\sqrt{4^2 + (-3)^2}$    (D)  $\sqrt{4^2 + 5^2}$



## 第八章 多元函数微分学

1. 由方程  $z^3 = xy$  所确定的隐函数  $z = f(x, y)$  在点  $(1, 1)$  的全微分  $dz$  为 ( C ).

(A)  $-\frac{1}{3}dx - \frac{1}{3}dy$     (B)  $dx + dy$     (C)  $\frac{1}{3}dx + \frac{1}{3}dy$     (D)  $-dx - dy$

2. 当  $x = 1, y = 1$  时, 二元函数  $z = e^{x^2y^3}$  的全微分是 ( A ).

(A)  $2edx + 3edy$     (B)  $5e$     (C)  $3edx + 2edy$     (D)  $2dx + 3dy$

3. 已知  $z = f(\sin x, 3x + 2y)$ , 其中函数  $f(\cdot, \cdot)$  具有一阶偏导数, 则  $\frac{\partial z}{\partial x} =$  ( D ).

(A)  $f'_1 + 2f'_2$     (B)  $f'_1 + 3f'_2$     (C)  $f'_1 \cos x + 5f'_2$     (D)  $f'_1 \cos x + 3f'_2$

4. 球面  $x^2 + y^2 + z^2 - 2z = 0$  围成的立体内部的点是 ( D ).

(A)  $(0, 0, 2)$     (B)  $(0, 0, -2)$     (C)  $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$     (D)  $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

5. 考虑二元函数  $f(x, y)$  的下面四条性质:

- ①  $f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  处连续;
- ②  $f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  处两个偏导数都连续;
- ③  $f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  处可微;
- ④  $f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  处两个偏导数都存在.

若用 " $P \Rightarrow Q$ " 表示性质  $P$  推出性质  $Q$ , 则有 ( D )

(A) ③  $\Rightarrow$  ②  $\Rightarrow$  ①    (B) ③  $\Rightarrow$  ④  $\Rightarrow$  ①  
(C) ③  $\Rightarrow$  ①  $\Rightarrow$  ④    (D) ②  $\Rightarrow$  ③  $\Rightarrow$  ①

6. 二元函数  $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$  的极大值点是 ( B ).

(A)  $(1, 0)$     (B)  $(-3, 2)$     (C)  $(-3, 0)$     (D)  $(1, 2)$

7. 设  $z = \sin(xy)$ , 则  $\frac{\partial z}{\partial x} =$  ( C ).

(A)  $y \sin(xy)$     (B)  $-y \sin(xy)$     (C)  $y \cos(xy)$     (D)  $-y \cos(xy)$

8. 如果  $f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$ , 则二元函数  $z = f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  处 ( B ).
- (A) 一定连续 (B) 一定偏导数存在  
(C) 一定可微 (D) 一定有极值
9. 设  $z = xe^{xy}$ , 则  $\frac{\partial z}{\partial x}$  等于 ( D ).
- (A)  $xye^{xy}$  (B)  $e^{xy}$  (C)  $x^2e^{xy}$  (D)  $(1 + xy)e^{xy}$
10. 设  $z = \arctan \frac{y}{x}$ , 则  $\frac{\partial z}{\partial x}$  等于 ( A ).
- (A)  $-\frac{y}{x^2 + y^2}$  (B)  $\frac{y}{x^2 + y^2}$  (C)  $\frac{x}{x^2 + y^2}$  (D)  $-\frac{x}{x^2 + y^2}$
11. 函数  $f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  连续是  $f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  偏导数存在的 ( D ).
- (A) 充分条件 (B) 必要条件 (C) 充要条件 (D) 无关条件
12. 函数  $f(x, y) = x^2 - y^2$  在其定义域上 ( D ).
- (A) 有极大值无极小值 (B) 无极大值有极小值  
(C) 有极大值有极小值 (D) 无极大值无极小值
13. [另附] 函数  $f(x, y) = xy$  在其定义域上 ( D ).
- (A) 有极大值无极小值 (B) 无极大值有极小值  
(C) 有极大值有极小值 (D) 无极大值无极小值
14. 设  $z = \sqrt{\ln(xy)}$ , 则  $\frac{\partial z}{\partial x}$  等于 ( C ).
- (A)  $\frac{1}{x\sqrt{\ln(xy)}}$  (B)  $\frac{1}{2y\sqrt{\ln(xy)}}$  (C)  $\frac{1}{2x\sqrt{\ln(xy)}}$  (D)  $\frac{1}{2\sqrt{\ln(xy)}}$
15. 设  $z = x^2 + (y - 2)\arcsin \sqrt{\frac{x}{y}}$ , 那么  $\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(1,2)} = ( A )$ .
- (A) 2 (B) 1 (C)  $\frac{\pi}{2}$  (D)  $\frac{\pi}{4}$
16. 设函数  $z = f\left(3x, \frac{x}{y}\right)$ ,  $f$  具有一阶连续偏导数, 则  $\frac{\partial z}{\partial y} = \underline{-\frac{x}{y^2}f'_2}$ .
17. 设产品 A 的需求函数是  $Q_A = 14 - 2P_A + 5P_B + \frac{1}{10}y$ , 其中  $P_A, P_B, y$  分别为 A, B 产品的价格以及消费者收入. 则当  $P_A = 4, P_B = 2, y = 200$  时,  $Q_A$  对  $P_B$  的需求偏弹性为  $\underline{\frac{5}{18}}$ .

18. 商品 A 的销售量  $Q_1$ , 除与它自身的价格  $P_1$  有关外, 还与商品 B 的价格  $P_2$  有关:  
 $Q_1 = 80 + 7P_1 + \frac{400}{P_1} - 5P_2 - P_2^2$ , 则  $P_1 = 20, P_2 = 2$  时,  $Q_1$  对  $P_1$  的偏边际为 6.
19. 设  $z = e^{2x-3z} + 2y$ , 则  $3\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} =$  2.
20. 设函数  $z = x^2 e^y + y^2 \sin x$ , 则  $dz|_{(\pi,0)} =$   $2\pi dx + \pi^2 dy$ .
21. 设函数  $f(x) = \ln \sqrt{1+x^2+y^2}$ , 则  $dz|_{(1,1)} =$   $\frac{1}{3}(dx+dy)$ .
22. 函数  $e^z = x^2 + y^2 - z$ , 则  $\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(0,1)} =$  0.
23. 已知函数  $f(x+y, x-y) = x^2 - y^2$ , 则  $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} =$   $x+y$ .
24. 设  $z = x^2 e^y + y^2 \sin x$ , 则  $dz|_{(\pi,0)} =$   $2\pi dx + \pi^2 dy$ .
25. 设二元函数  $z = \int_1^{xy} \ln t dt$ , 则  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$   $\ln(xy) + 1$ .
26. 设  $f(x,y) = \frac{x}{y^2}$ , 则  $df(x,y)|_{x=1,y=1} =$   $dx - 2dy$ .
27. 设  $z = f(3x-2y, xy)$ , 且  $f(u,v)$  可微, 则全微分  $dz =$   $(3f'_1 + yf'_2)dx + (-2f'_1 + xf'_2)dy$ .
28. 设  $z = f(x \ln y, y-x)$ , 且  $f$  具有一阶连续偏导数, 则全微分  
 $dz =$   $(f'_1 \ln y - f'_2)dx + \left(\frac{x}{y}f'_1 + f'_2\right)dy$ .
29. 已知函数  $z = \ln(1+x^2-y^2)$ , 则  $dz|_{(1,1)} =$   $2dx - 2dy$ .
30. 函数  $z = x^2 y + \frac{x}{y}$  的全微分  $dz =$   $(2xy + \frac{1}{y})dx + (x^2 - \frac{x}{y^2})dy$ .
31. 设函数  $z = e^x \sin y$ , 则  $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 =$   $e^{2x}$ .
32. 函数  $z = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{y^2-1}$  的定义域是  $\{(x,y) | |x| \leq 1, |y| \geq 1\}$ .

33. 设  $f(x+y, x-y) = xy + y^2$ , 则  $f(y, x) = \underline{\frac{1}{2}y(y-x)}$  .

34. 设  $z = ye^{x+y}$ , 则  $dz = \underline{e^{x+y}(y dx + (1+y)dy)}$  .

35. 已知  $f(x, y) = 30 + 2x^2 - 6y - 6xy + 6y^2$ , 求  $f(x, y)$  的极值点和极值.

参考答案: 极小值点 (3, 2), 极小值 24

36. 已知  $f(u, v)$  有连续的偏导数,  $z = f(xy, x + \ln y)$ , 求全微分  $dz$ .

参考答案:  $dz = (yf'_1 + f'_2)dx + \left(xf'_1 + \frac{1}{y}f'_2\right)dy$

37. 求函数  $u = xy + 2yz$  在约束条件  $x^2 + y^2 + z^2 = 10$  下的最大值与最小值.

参考答案: 最大值与最小值分别是:  $u_{\max} = 5\sqrt{5}, u_{\min} = -5\sqrt{5}$ .

38. 设  $z = f(x^2 - y^2, e^{xy})$ , 其中  $f$  具有连续二阶偏导数, 求  $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ .

参考答案:  $\frac{\partial z}{\partial x} = 2xf'_1 + ye^{xy}f'_2, \frac{\partial z}{\partial y} = -2yf'_1 + xe^{xy}f'_2, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -4xyf''_{11} + 2e^{xy}(x^2 - y^2)f''_{12} + xye^{2xy}f''_{22} + e^{xy}(1 + xy)f'_2$ .

39. 求二元函数  $z = e^{2x}(x + y^2 + 2y)$  的极值.

参考答案:  $z(x, y)$  在  $\left(\frac{1}{2}, -1\right)$  处取得极小值  $z\left(\frac{1}{2}, -1\right) = -\frac{e}{2}$ .

40. 求二元函数  $z = 3x^2 - 4xy + 5y^2 - 2x - 6y + 1$  的极值.

参考答案: 函数  $z$  在点 (1, 1) 处取极小值  $z(1, 1) = -3$ .

41. 设  $x + 2y + z - 2\sqrt{xyz} = 0$ , 求  $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ .

参考答案:  $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{yz - \sqrt{xyz}}{\sqrt{xyz} - xy}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xz - 2\sqrt{xyz}}{\sqrt{xyz} - xy}$ .

42. 设函数  $z = f(x, y)$  由方程  $e^z = xyz$  所确定, 求  $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$  及  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

参考答案:  $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{yz}{e^z - xy} = \frac{z}{x(z-1)}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xz}{e^z - xy} = \frac{z}{y(z-1)}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{-z}{xy(z-1)^3}$ .

43. 求二元函数  $f(x, y) = xy$  在附加条件  $x + y = 1$  下的极大值.

参考答案:  $f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$ .

44. 设函数  $z = f(x, y)$  由方程  $e^z = x^3y^2 + z$  所确定, 求  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ .

参考答案:  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{6x^2y(e^z - 1)^2 - 6x^5y^3e^z}{(e^z - 1)^3}$ .

45. 设二元函数  $f(x, y) = 3x + 4y - ax^2 - 2ay^2 - 2bxy$ , 试讨论参数  $a, b$  满足什么条件时,  $f(x, y)$  有唯一极大值, 或有唯一极小值.

参考答案: 当  $b^2 < 2a^2$  且  $a > 0$  时,  $f(x, y)$  有唯一极大值; 当  $b^2 < 2a^2$  且  $a < 0$  时,  $f(x, y)$  有唯一极小值.

46. 已知  $f$  具有二阶连续偏导数, 且  $z = f(x^2 - y^2, xy)$ , 求  $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ .

参考答案:  $\frac{\partial z}{\partial x} = 2xf_u + yf_v = 2xf'_1 + yf'_2, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2f''_1 + 4x^2f''_{11} + 4xyf''_{12} + y^2f''_{22}$ .

47. 设  $x^3 + y - xyz^5 = 0$ , 求  $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ .

参考答案:  $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{3x^2 - yz^5}{5xyz^4}; \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1 - xz^5}{5xyz^4}$ .

48. 已知直角三角形斜边长为  $l$ , 试求两条直角边等于何值时, 直角三角形的周长最大?

参考答案:  $x = y = \frac{\sqrt{2}}{x}l$  时,  $(x + y + l)_{\max} = (\sqrt{2} + 1)l$ .

49. 已知  $f$  具有二阶连续偏导数, 且  $z = f(xy, \frac{y}{x})$ , 求  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ .

参考答案:  $f'_1 + xyf''_{11} - \frac{1}{x^2}f'_2 - \frac{y}{x^3}f''_{22}$ .

50. 设函数  $z = f(x, y)$  由方程  $x^2 + y^2 + z^2 - 4z = 0$  所确定, 求  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ .

参考答案:  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{(2-z)^2 + x^2}{(2-z)^3}$ .

51. 求抛物线  $y = x^2$  和直线  $x - y - 2 = 0$  之间的最短距离.

参考答案:  $\frac{7\sqrt{2}}{8}$ .

52. 设  $z = \arctan(xy)$ , 求  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ .

参考答案:  $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{1+x^2y^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{1-x^2y^2}{(1+x^2y^2)^2}$ .

53. [另附] 设  $z = \arctan(\frac{y}{x})$ , 求  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ .

参考答案:  $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$ .

54. 设  $z = z(x, y)$  由方程  $\frac{y}{z} = \ln \frac{z}{x}$  所确定, 求  $dz$ .

参考答案:  $dz = \frac{z^2}{y+z} \left( \frac{1}{x} dx + \frac{1}{z} dy \right)$ .

55. 已知求函数  $z = \ln(y + \sqrt{x^2 + y^2})$ , 求  $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ .

参考答案:  $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{y}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}$ .

56. 若函数  $z = 2x^2 + 2y^2 + 3xy + ax + by + c$  在点  $(-2, 3)$  处取得极值 3, 求常数  $a, b, c$  之积  $abc$ , 并判定该极值是极大还是极小.

参考答案:  $abc = 66$ , 极小值.

57. 某公司通过电视和报纸两种形式做广告, 已知销售收入  $R$  (万元) 与电视广告费  $x$  (万元)、报纸广告费  $y$  (万元) 关系为:

$$R(x, y) = 15 + 14x + 32y - 8xy - 2x^2 - 10y^2$$

(1) 广告费不限下, 求最佳广告策略;

(2) 如果广告费为 1.5 万元, 求最佳广告策略.

参考答案: (1)  $x = \frac{3}{4}, y = \frac{5}{4}, L_{\max} = 39.25$ , (2)  $x = 0, y = 1.5, L_{\max} = 39$ .

58. 设  $z = z(x, y)$ , 由

$$F\left(x + \frac{z}{y}, y + \frac{z}{x}\right) = 0$$

给出, 其中  $F(u, v)$  具有一阶连续偏导数. 证明:

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} + xy = z$$

参考答案: 直接计算偏导, 带入公式易得.

59. 某工厂生产  $A, B$  两种产品, 销售单价分别为 10 千元与 9 千元, 生产  $x$  单位的  $A$  产品与生产  $y$  单位的  $B$  产品的总费用

$$W(x, y) = 400 + 2x + 3y + 0.01(3x^2 + xy + 3y^2) \text{ (千元)}.$$

求当产品  $A, B$  的产量各为多少时, 能使获得的利润最大, 并求最大利润.

参考答案: 当  $A$  产品生产 120 单位,  $B$  产品生产 80 单位时, 所得利润最大. 最大利润为  $L(120, 80) = 320$  (千元).

60. 设二元函数  $F(x, y)$  在  $(x_0, y_0)$  某邻域内具有二阶连续的偏导数, 且

$$F(x_0, y_0) = 0, F_x(x_0, y_0) = 0, F_{xx}(x_0, y_0) \cdot F_y(x_0, y_0) \neq 0.$$

证明: 由方程  $F(x, y) = 0$  在  $(x_0, y_0)$  某邻域内确定的隐函数  $y = y(x)$  在点  $x = x_0$  处取得极值.

参考答案: 略.

61. (B班) 设  $z = f[x + \varphi(y)]$ , 其中  $f$  二次可导,  $\varphi$  可导, 证明  $\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ .

参考答案: 略.

62. 设  $y = f(x, t)$ , 而  $t$  是由方程  $F(x, y, t) = 0$  所确定的  $x, y$  的函数, 其中  $f, F$  都具有一阶连续偏导数, 试证

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial F}{\partial t} - \frac{\partial f}{\partial t} \cdot \frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial t} \cdot \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial t}}.$$

参考答案: 略.



## 第九章 二重积分

1. 与二次积分  $\int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} f(x, y) dy$  相等的是 ( A ) .

(A)  $\int_0^1 dy \int_{y^2}^{\sqrt{y}} f(x, y) dx$

(B)  $\int_0^1 dy \int_y^{y^2} f(x, y) dx$

(C)  $\int_0^1 dy \int_{y^2}^y f(x, y) dx$

(D)  $\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{y^2} f(x, y) dx$

2. 设  $f(x, y)$  是连续函数, 则与二次积分  $\int_1^e dx \int_0^{\ln x} f(x, y) dy$  相等的是 ( A ) .

(A)  $\int_0^1 dy \int_{e^y}^e f(x, y) dx$

(B)  $\int_1^e dy \int_0^{\ln y} f(x, y) dx$

(C)  $\int_0^1 dy \int_e^{e^y} f(x, y) dx$

(D)  $\int_0^\pi d\theta \int_{\frac{e}{\cos\theta}}^e f(r \cos\theta, r \sin\theta) r dr$

3. 设函数  $f(t)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上连续, 则  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{2\cos\theta}^2 f(r^2) r dr = ( B )$  .

(A)  $\int_0^2 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{x^2+y^2} f(x^2+y^2) dy$

(B)  $\int_0^2 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x^2+y^2) dy$

(C)  $\int_0^2 dy \int_{1+\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \sqrt{x^2+y^2} f(x^2+y^2) dx$

(D)  $\int_0^2 dy \int_{1+\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x^2+y^2) dx$

4. 设  $x = r \cos\theta$ ,  $y = r \sin\theta$ , 则极坐标系  $(r, \theta)$  中的累次积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}^1 f(r \cos\theta, r \sin\theta) dr$$

可化为直角坐标系  $(x, y)$  中的累次积分 ( B )

$$(A) \int_0^1 dx \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy$$

$$(B) \int_0^1 dx \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{f(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} dy$$

$$(C) \int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy$$

$$(D) \int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{1-x^2}} \frac{f(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} dy$$

5. 二次积分  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\cos\theta} f(r \cos\theta, r \sin\theta) r dr$  可以写成 ( D ) .

$$(A) \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y-y^2}} f(x, y) dx$$

$$(B) \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx$$

$$(C) \int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) dy$$

$$(D) \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x-x^2}} f(x, y) dy$$

6. 设函数  $f(x, y)$  为连续函数, 二次积分  $\int_0^2 dx \int_x^2 f(x, y) dy$  交换积分次序后等于 ( A ) .

$$(A) \int_0^2 dy \int_0^y f(x, y) dx$$

$$(B) \int_0^1 dy \int_0^y f(x, y) dx$$

$$(C) \int_0^2 dx \int_y^2 f(x, y) dy$$

$$(D) \int_0^2 dy \int_0^2 f(x, y) dx$$

7. 设函数  $f(x, y)$  为连续函数, 二次积分  $\int_0^1 dy \int_{y^2}^y f(x, y) dx$  交换积分次序后等于 ( B ) .

$$(A) \int_0^1 dx \int_{x^2}^x f(x, y) dy$$

$$(B) \int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{x}} f(x, y) dy$$

$$(C) \int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^x f(x, y) dy$$

$$(D) \int_0^1 dx \int_x^{x^2} f(x, y) dy$$

8. 设  $f(x, y)$  为连续函数, 二次积分  $\int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} f(x, y) dx$  交换积分次序后等于 ( B ) .

$$(A) \int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^x f(x, y) dy$$

$$(B) \int_0^1 dx \int_{x^2}^x f(x, y) dy$$

$$(C) \int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{x}} f(x, y) dy$$

$$(D) \int_0^1 dx \int_x^{x^2} f(x, y) dy$$

9. 交换  $\int_{\frac{1}{2}}^1 dx \int_{\frac{1}{x}}^1 f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_x^1 f(x, y) dy$  的次序, 则下列结果正确的是 ( A ) .

$$(A) \int_1^2 dy \int_{\frac{1}{y}}^y f(x, y) dx$$

$$(B) \int_1^2 dy \int_y^{\frac{1}{y}} f(x, y) dx$$

$$(C) \int_1^3 dy \int_{\frac{1}{x}}^x f(x, y) dx$$

$$(D) \int_{\frac{1}{3}}^1 dy \int_x^{\frac{1}{x}} f(x, y) dx$$

10. 设区域  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 2\}$ , 则二重积分  $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy = \underline{\frac{4\sqrt{2}}{3}\pi}$ .

11. 设区域  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ , 则二重积分  $\iint_D e^{x^2+y^2} dx dy = \underline{\pi(e-1)}$ .

12. 积分  $\int_0^2 dx \int_x^2 e^{-y^2} dy$  的值等于  $\underline{\frac{1}{2}(1-e^{-4})}$ .

13. 交换二次积分  $\int_{-1}^0 dx \int_0^{1+x} f(x, y) dy + \int_0^1 dx \int_0^{1-x} f(x, y) dy =$   
 $\underline{\int_0^1 dy \int_{y-1}^{1-y} f(x, y) dx}$ .

14. 设区域  $D = \{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$ , 则  $\iint_D \frac{x+y}{x^2+y^2} dx dy = \underline{2}$ .

15. 若  $D$  是由  $|x| \leq 1, |y| \leq 1$  围成的正方形区域, 则  $\iint_D x^2 dx dy = \underline{\frac{4}{3}}$ .

16. 二重积分  $\iint_{x^2+y^2 \leq 1} e^{x^2+y^2} dx dy = \underline{\pi(e-1)}$ .

17. 已知  $f(x, y) = xy + 2 \iint_D f(x, y) dx dy$ , 其中  $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ ,  
且  $f(x, y)$  连续, 则  $f(x, y) = \underline{xy - \frac{1}{2}}$ .

18. 二重积分  $\int_{-1}^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(\arctan \frac{y}{x}) dy$  在极坐标系中表示为  $\underline{\int_0^\pi d\theta \int_0^1 f(\theta) r dr}$ .

19. 已知  $\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{3}$ , 则  $\iint_D f(x)f(y) dx dy = \underline{\frac{1}{9}}$ , 其中  $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ .

20.  $D: x^2 + y^2 \leq 1$ , 则  $\iint_D e^{x^2+y^2} d\sigma = \underline{\pi(e-1)}$ .

21. 计算二重积分  $\iint_D x dx dy$ , 其中  $D$  是由圆  $x^2 + y^2 = 1, x^2 + y^2 = 4$  及直线  $y = 0, y = \sqrt{3}x$  所围成的在第一象限内的有界闭区域.

参考答案:  $\frac{7\sqrt{3}}{6}$ .

22. 计算二重积分  $\iint_D x \sin y^3 dx dy$ , 其中  $D$  是由直线  $y = x, y = 1$  和  $y$  轴所围成的有界闭区域.

参考答案:  $\frac{1}{6}(1 - \cos 1)$

23. 求由曲线  $y = e^{2x}, y = e^{-2x}, x = 1$  所围成图形的面积  $A$ , 以及该图形绕  $x$  轴旋转一周所得旋转体的体积  $V$ .

参考答案:  $A = \frac{e^2 + e^{-2} - 2}{2}, V = \frac{\pi(e^4 + e^{-4} - 2)}{4}$ .

24. 计算二重积分  $\iint_D \frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2} d\sigma$ , 其中  $D$  是由圆周  $x^2 + y^2 = 1$  及直线  $x = 0, y = 0$  所围成的在第一象限内的闭区域.

参考答案:  $\frac{\pi}{2} \left( \ln 2 - \frac{1}{2} \right)$ .

25. 已知由曲线  $y = x^2 - 2x, y = 0, x = 1, x = 3$  所围成的平面图形  $D$ ,

(1) 求平面图形  $D$  的面积  $S$ ;

(2) 求平面图形  $D$  绕  $y$  轴旋转一周所得旋转体的体积  $V_y$ .

参考答案:  $S = 2, V_y = 9\pi$ .

26. 计算二重积分  $\iint_D \frac{\sin x}{x} dx dy$ ,  $D$  是由直线  $y = x$  及抛物线及  $y = x^2$  围成的区域.

参考答案:  $1 - \sin 1$ .

27. 计算二重积分  $\iint_D \arctan \frac{y}{x} d\sigma$ ,  $D$  是由圆周  $x^2 + y^2 = 1, x^2 + y^2 = 4$  及直线  $y = 0, y = x$  所围成的在第一象限内的闭区域.

参考答案:  $\frac{3}{64}\pi^2$ .

28. 已知由  $x$  轴、曲线  $y = x^2$  及其在  $(1, 1)$  处的切线所围成平面图形为  $D$ ,
- (1) 求平面图形  $D$  的面积;
- (2) 求平面图形  $D$  绕  $x$  轴旋转一周所成旋转体体积.

参考答案:  $S = \frac{1}{12}, V_x = \frac{1}{12}.$

29. 计算二重积分  $\iint_D \frac{xy}{\sqrt{1+y^3}} d\sigma$ , 其中  $D$  是由  $x = \sqrt{y}, x = 0$  与  $y = 1$  所围成的区域.

参考答案:  $\frac{1}{3}(\sqrt{2}-1).$

30. 计算二重积分  $\iint_D \sqrt{x^2+y^2} d\sigma$ , 其中  $D = \{(x, y) | x \leq x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}.$

参考答案:  $\frac{\pi}{3} - \frac{2}{9}.$

31. 计算二重积分  $\iint_D xy \, dx \, dy$ , 其中  $D$  是由直线  $y = 2, y = x, y = 2x$  所围成的面积.

参考答案:  $\frac{3}{2}.$

32. 计算二重积分  $\iint_D \frac{dx \, dy}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{4-(x^2+y^2)}}$ , 其中  $D = \{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}.$

参考答案:  $\frac{\pi^2}{6}.$

33. 计算二重积分  $\iint_D ye^{\frac{x}{y}} \, dx \, dy$ , 其中区域  $D$  由直线  $y = x, x = 0, y = 1$  围成.

参考答案:  $\frac{e-1}{3}.$

34. 计算二重积分  $\iint_D \cos \sqrt{x^2+y^2} \, dx \, dy$ , 其中  $D$  为环形域  $\pi^2 \leq x^2 + y^2 \leq 4\pi^2.$

参考答案:  $4\pi.$

35. 计算二重积分  $\iint_D (x^2 + y) dx dy$ , 其中  $D$  由曲线  $y = x^2$  与  $x = y^2$  围成.

参考答案:  $\frac{33}{140}$ .

36. 计算二重积分  $\iint_D \ln \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$ , 其中  $D$  为环形域  $1 \leq x^2 + y^2 \leq e^2$ .

参考答案:  $\frac{\pi}{2}(e^2 + 1)$ .

37. 计算二重积分  $\iint_D \frac{y}{1+x^6} dx dy$ , 其中  $D = \{(x, y) | 0 \leq y \leq x, 0 \leq x \leq 1\}$ .

参考答案:  $\frac{\pi}{24}$ .

38. 计算二重积分  $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$ , 其中  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$ .

参考答案:  $\frac{\pi}{12}$ .

39. 计算二重积分  $\iint_D \sin \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$ , 其中  $D$  为环形域  $\pi^2 \leq x^2 + y^2 \leq 4\pi^2$ .

参考答案:  $-6\pi^2$ .

40. 计算二重积分  $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$ , 其中  $D: x^2 + y^2 \leq 2x$ .

参考答案:  $\frac{32}{9}$ .

41. 计算二重积分  $\int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^1 \sin y^3 dy$ .

参考答案:  $\frac{1}{3}(1 - \cos 1)$ .

## 第十章 微分方程与差分方程

1. 差分方程  $y_x + 5y_{x-1} = 0$  满足初值条件  $y_0 = 3$  的特解是 ( C ).  
(A)  $3\left(\frac{1}{5}\right)^x$       (B)  $3\left(-\frac{1}{5}\right)^x$       (C)  $3(-5)^x$       (D)  $3(5)^x$
2. 满足微分方程  $y'' - y' - 12y = 0$ ,  $y|_{x=0} = 2$ ,  $y'|_{x=0} = 1$  的特解是 ( D ).  
(A)  $y = e^{3x} + e^{4x}$       (B)  $y = e^{3x} + e^{-4x}$       (C)  $y = e^{-3x} + e^{-4x}$       (D)  $y = e^{-3x} + e^{4x}$
3. 满足微分方程  $9y'' - 6y' + y = 0$ ,  $y|_{x=0} = 1$ ,  $y'|_{x=0} = \frac{4}{3}$  的特解是 ( C ).  
(A)  $y = (1-x)e^{\frac{x}{3}}$       (B)  $y = 1 + xe^{\frac{x}{3}}$       (C)  $y = (1+x)e^{\frac{x}{3}}$       (D)  $y = e^{\frac{x}{3}}$
4. 微分方程  $y'' - 4y' = 0$  的通解为  $y =$  ( D ).  
(A)  $C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$       (B)  $C_1 + C_2 e^{-4x}$       (C)  $C_1 e^{4x} + C_2 e^{-4x}$       (D)  $C_1 + C_2 e^{4x}$
5. 下列一阶微分方程中, 属于齐次方程的是 ( A ).  
(A)  $(xy - y^2)dx = (x^2 - 2xy)dy$       (B)  $(x+y)y' = \ln(x+y)$   
(C)  $\frac{dy}{dx} = x \sin y$       (D)  $y' + \frac{1}{x}y = e^x$
6. 一阶常系数齐次线性差分方程  $2y_{x+1} - 3y_x = 0$  的通解是 ( C ).  
(A)  $y_x = C\left(\frac{2}{3}\right)^x$       (B)  $y_x = C\left(-\frac{2}{3}\right)^x$       (C)  $y_x = C\left(\frac{3}{2}\right)^x$       (D)  $y_x = C\left(-\frac{3}{2}\right)^x$
7. 微分方程  $(x+y)dy = x \arctan\left(\frac{y}{x}\right)dx$  是 ( C ).  
(A) 可分离变量微分方程      (B) 一阶线性非齐次方程  
(C) 齐次方程      (D) 前面三种都不是
8. 微分方程  $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \tan\frac{y}{x}$  的通解是 ( D ).  
(A)  $\sin\frac{y}{x} = \frac{1}{Cx}$       (B)  $\sin\frac{y}{x} = x + C$       (C)  $\sin\frac{x}{y} = Cx$       (D)  $\sin\frac{y}{x} = Cx$

9. 函数  $y = \cos x$  是下列哪个微分方程的解 ( C ).
- (A)  $y' + y = 0$       (B)  $y' + 2y = 0$       (C)  $y'' + y = 0$       (D)  $y'' + y = \cos x$
10. 若函数  $y = e^{-x}$  是方程  $y'' + ay' - 2y = 0$  的一个解, 则  $a$  值等于 ( C ).
- (A) 0      (B) 1      (C) -1      (D) 2
11. 微分方程  $y'' + 4y = \cos 2x$  的特解形式为 ( D ).
- (A)  $y = A \cos 2x$       (B)  $y = A \sin 2x$   
(C)  $y = A \sin 2x + B \cos 2x$       (D)  $y = x(A \sin 2x + B \cos 2x)$
12. 若函数  $y_1 = e^{2x}$ ,  $y_2 = e^{-x}$  是二阶常系数齐次线性微分方程  $y'' + py' + qy = 0$  的两个特解, 则  $p, q$  的值分别等于 ( A ).
- (A) -1, -2      (B) -1, 2      (C) 1, -2      (D) 1, 2
13. 微分方程  $y'' - 2y' + 2y = 0$  的通解为 ( D ).
- (A)  $y = e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$       (B)  $y = e^x(C \cos x + \frac{1}{2}C \sin x)$   
(C)  $y = e^x(C \sin x + \cos x)$       (D)  $y = e^x(C_1 \sin x - C_2 \cos x)$
14. 微分方程  $y'' + e^x(y')^2 = 0$  满足条件  $y(0) = 1, y'(0) = 1$  的解是 ( C ).
- (A)  $y = \frac{1}{2}(e^x + 1)$       (B)  $y = \frac{1}{2}(e^{-x} + 1)$       (C)  $y = 2 - e^{-x}$       (D)  $y = 2e^{-x} - 1$
15. 若函数  $y = \cos \omega x$  是方程  $\frac{d^2 y}{dx^2} + 9y = 0$  的解, 则  $\omega$  的值等于 ( C ).
- (A)  $\pm 1$       (B)  $\pm 2$       (C)  $\pm 3$       (D)  $\pm 4$
16. 微分方程  $y'' - 5y' + 6y = 0$  的通解为 ( B ).
- (A)  $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x}$       (B)  $y = C_1 e^{2x} - C_2 e^{3x}$   
(C)  $y = e^{2x} - e^{3x}$       (D)  $y = e^{2x} + e^{3x}$
17. 微分方程  $\frac{d^2 y}{dx^2} + \omega^2 y = 0$  的通解是 (其中  $c, c_1, c_2$  均为任意常数) ( C ).
- (A)  $y = c \cos \omega x$       (B)  $y = c \sin \omega x$   
(C)  $y = c_1 \cos \omega x + c_2 \sin \omega x$       (D)  $y = \cos \omega x + \sin \omega x$
18. 差分方程  $\Delta^2 y_x + y_x + 1 = 0$  的阶是 2.

19. 差分方程  $3\Delta y_x + y_x = 0$  满足初值条件  $y_0 = 2$  的特解为  $y_x = \underline{2\left(\frac{2}{3}\right)^x}$  .
20. 二阶常系数齐次线性微分方程  $y'' + y' + y = 0$  的通解为  $\underline{e^{-\frac{x}{2}}\left(C_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x\right)}$  .
21. 微分方程  $\frac{dx}{y} + \frac{dy}{x} = 0$  满足  $y|_{x=3} = 4$  的特解是  $\underline{x^2 + y^2 = 25}$  .
22. 微分方程  $y' \sin x = y \cos x \ln y$  且满足  $y|_{x=\frac{\pi}{2}} = e$  的解是  $\underline{y = e^{\sin x}}$  .
23. 微分方程  $y''' - x^2 y'' - x^5 = 1$  的通解中应含有独立常数个数为 3 .
24. 方程  $y'' = \sin x$  的通解为  $\underline{y = -\sin x + C_1 x + C_2}$  .
25. 方程  $y'' + y = x \cos 2x$  的特解形式为  $\underline{y = (Ax + B) \cos 2x + (Cx + D) \sin 2x}$  .
26. 微分方程  $y' = x y''$  的通解为  $\underline{y = c_1 x^2 + c_2 (c_1, c_2 \in R)}$  .
27. 方程  $y'' - 2y = e^x$  的特解形式为  $\underline{Ae^x \text{ 或 } -e^x}$  .
28. 微分方程  $(1+x)y' + 1 = 2e^{-y}$  的通解为  $\underline{(x+1)(2-e^y) + C}$  .
29. 求一阶非齐次线性微分方程  $\frac{dy}{dx} - 3y = e^{3x}$  的通解.
- 参考答案:  $y = \frac{1}{x}(\ln x + 3)$
30. 求微分方程  $y' - \frac{2}{x}y = x^2$  满足条件  $y|_{x=1} = 3$  的特解.
- 参考答案:  $y = x^3 + 2x^2$ .
31. 求微分方程  $y' + y \cos x = (\ln x)e^{-\sin x}$  满足  $y|_{x=\pi} = \ln \pi$  的特解.
- 参考答案:  $y = e^{-\sin x}[\ln x - x + \pi + (1 - \pi)\ln \pi]$ .
32. 求微分方程  $(x^2 - 1)y' + 2xy - \cos x = 0$  的通解.
- 参考答案: 通解为:  $y = \frac{\sin x + C}{x^2 - 1}$ .

33. 求微分方程  $y^2 + x^2 \frac{dy}{dx} = xy \frac{dy}{dx}$  的通解.

参考答案: 微分方程通解为:  $y = Ce^{\frac{y}{x}}$ .

34. 求微分方程  $\frac{dy}{dx} - 2y = e^x + x$  的通解.

参考答案:  $Ce^{2x} - e^x - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$

35. 求微分方程  $xy' - y = 1 + x^3$  的通解.

参考答案:  $-1 + \frac{1}{2}x^3 + Cx$ .

36. 求微分方程  $(y^2 - 2x^2)dx + 2xy dy = 0$  满足初始条件  $y|_{x=1} = 1$  的特解.

参考答案: 所求特解为:  $3xy^2 - 2x^3 = 1$ .

37. 求微分方程  $y'' - 3y' + 2y = xe^{2x}$  的通解.

参考答案: 微分方程通解为

$$Y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + x \left( \frac{1}{2}x - 1 \right) e^{2x},$$

其中  $C_1, C_2$  为任意常数.

38. 求微分方程  $xy dx + (x^2 + 1)dy = 0$  满足初值条件  $y|_{x=0} = 1$  的特解.

参考答案: 方程的特解为  $y(1 + x^2)^{\frac{1}{2}} = 1$ , 即  $y = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$ .

39. 求微分方程  $(x^2 + 3y^2)dx - 2xy dy = 0$  的通解.

参考答案:  $x^3 = C(x^2 + y^2)$ .

40. 求微分方程  $(y^2 - 6x)y' + 2y = 0$  的通解.

参考答案:  $x = \frac{1}{2}y^2 + Cy^3$ .

41. 求微分方程  $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$  的通解.

参考答案:  $y = \left( C_1 + C_2 x + \frac{1}{2}x^2 \right) e^{2x}$ .

42. 求方程  $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = \frac{\sin x}{x}$  的通解.

参考答案:  $\frac{1}{x}(-\cos x + C)$ .

43. 求微分方程  $y' = \frac{y}{x}(1 + \ln y - \ln x)$  的通解.

参考答案:  $y = xe^{Cx}$ .



## 第十一章 无穷级数

1. 下列级数中收敛的是 ( B ).

(A)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{3n}$       (B)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n}$       (C)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$       (D)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n - 1}{2^n}$

2. 下列级数收敛的是 ( B ).

(A)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{2n}$       (B)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n}$       (C)  $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{2})^n$       (D)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{0.99}}$

3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$  是级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛的 ( B ).

(A) 充分条件      (B) 必要条件      (C) 充要条件      (D) 无关条件

4. 幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n \cdot 3^n}$  的收敛域为 ( D ).

(A) (0, 6)      (B) [0, 6]      (C) (0, 6]      (D) [0, 6)

5. 正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  的前  $n$  项部分和数列  $\{S_n\}$  有界是该级数收敛的 ( C ) 条件.

(A) 必要非充分      (B) 充分非必要      (C) 充要      (D) 无关

6. 下列函数 ( A ) 展开为  $x$  的幂级数是  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{2^{n+1}}$ ,  $x \in (-2, 2)$ .

(A)  $f(x) = \frac{1}{x+2}$       (B)  $f(x) = \frac{1}{x-2}$       (C)  $f(x) = \frac{1}{2x+1}$       (D)  $f(x) = \frac{1}{2-x}$

7. 以下四个关于级数的结论中, 正确的结论是 ( A )

(A) 若  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$  和  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n^2$  都收敛, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)^2$  收敛.

(B) 若  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n v_n|$  收敛, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$  与  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n^2$  都收敛.

(C) 若正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  发散, 则  $u_n \geq \frac{1}{n}$ .

(D) 若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛, 且  $u_n \geq v_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  也收敛.

8. 设  $a$  为常数, 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\sin a}{n^2} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$  ( B ).

- (A) 绝对收敛 (B) 发散  
(C) 条件收敛 (D) 收敛性取决于  $a$  的值

9. 若正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  和  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  满足关系  $a_n \leq b_n$ , 则 ( B ).

- (A) 当  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛时,  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  也收敛 (B) 当  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  收敛时,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  也收敛  
(C) 当  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  发散时,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛 (D) 当  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  发散时,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  也发散

10. 设  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  与  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  是正项级数, 且  $u_n > v_n (n = 1, 2, \dots, 99)$ ,  $u_n \leq v_n (n = 100, 101, \dots)$ , 则下列命题正确的是 ( B ).

- (A) 若  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  收敛 (B) 若  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  发散, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  发散  
(C) 若  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  发散, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  发散 (D) 若  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  收敛, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  发散

11. 设  $0 < u_n < \frac{1}{n} (n = 1, 2, \dots)$ , 则下列级数中一定收敛的是 ( D ).

- (A)  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  (B)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$  (C)  $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{u_n}$  (D)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n^2$

12. 设级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛, 则下列级数中必定发散是 ( D ).

- (A)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$  (B)  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$  (C)  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$  (D)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{u_n}$

13. 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ , 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  ( D ).

- (A) 一定收敛, 其和为零 (B) 一定收敛, 但不一定为零  
(C) 一定发散 (D) 可能收敛, 也可能发散

14. 下列级数中收敛的是 ( D ).

- (A)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n+1}$  (B)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n(n+2)}$   
(C)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n}$  (D)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(n+1)(n+3)}$

15. 将函数  $y = \sin 2x$  展开成  $x$  的幂级数, 其中  $x^3$  的系数为  $-\frac{4}{3}$ .
16. 设幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$  的收敛半径为 4, 则幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} 3a_n^2 x^n$  的收敛半径  $R = 16$ .
17. 幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n}}{n}$  ( $|x| < 1$ ) 的和函数  $f(x) = \ln(1+x^2)$ .
18. 函数  $f(x) = \frac{1}{5-x}$  ( $-1 < x < 5$ ) 展开成  $x-2$  的幂级数是  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{3^{n+1}}$ .
19. 已知  $a > 1$ , 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{a^n}$  的和为  $\frac{\pi}{a-1}$ .
20. 设幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+1)^n$  的收敛域是  $(-4, 2]$ , 则幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-2)^n$  的收敛区间是  $(-1, 5)$ .
21. 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{1}{4}$ , 则幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n}$  的收敛半径  $R = 2$ .
22. 实数  $q$  满足什么条件, 几何级数  $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$  收敛, 即  $q$  满足  $|q| < 1$ .
23. 幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{2^n}$ ,  $|x| < 2$  的和函数是  $\frac{2}{2+x}$ .
24. 幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n} x^n$  的收敛半径为 2.
25. 幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n} (x-1)^n$  的收敛域为  $(-1, 3]$ .
26. 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$  的和  $S = \frac{3}{4}$ .
27. 设幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n$  的收敛域为  $(-1, 1]$ .
28.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  当  $p$  满足条件  $p > 1$  时收敛.

29. 幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^{n+1}$ , 求该幂级数的收敛域及和函数.

参考答案: 收敛域为  $(-1, 1)$ , 和函数为  $\frac{x}{(1-x)^2}$ .

30. 求幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$  的收敛域及和函数.

参考答案: 收敛域  $(-1, 1)$ , 和函数  $s(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$

31. 证明级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \cos \frac{1}{n\sqrt{n}})$  收敛.

参考答案: 收敛

32. 幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n}$ , 求该幂级数的收敛域及和函数.

参考答案:  $-\ln(1+x)$ ,  $x \in (-1, 1]$ .

33. 若正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛, 证明: 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \sin n$  绝对收敛.

参考答案: 略

34. 判定级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}})$  敛散性; 若收敛, 说明是绝对收敛还是条件收敛.

参考答案: 条件收敛.

35. 判定级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{2}$  敛散性, 若收敛, 说明是绝对收敛还是条件收敛.

参考答案: 级数条件收敛.

36. 求幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} nx^{n+1}$  的收敛域及和函数.

参考答案:  $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} nx^{n+1} = \frac{x^2}{(1-x)^2}$ ,  $x \in (-1, 1)$ .

37. 已知级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$  收敛,  $a_n > 0$ , 求证:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$  也收敛.

参考答案: 略.

38. 判定级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\ln(1+n)}$  敛散性, 若收敛, 指出其是绝对收敛还是条件收敛.

参考答案: 原级数条件收敛.

39. 求幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n \cdot n}$  的收敛域及和函数.

参考答案:  $S(x) = -\ln\left(1 - \frac{x^2}{2}\right)$ ,  $x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ .

40. 求幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+2}$  的和函数及收敛域.

参考答案:  $S(x) = x \arctan x$ ,  $x \in [-1, 1]$ .

41. (B班) 将函数  $f(x) = \frac{1}{5-x}$  展开为  $(x-1)$  的幂级数, 并求其收敛域.

参考答案:  $f(x) = \frac{1}{5-x} = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x-1}{4}\right)^n$ ,  $x \in (-3, 5)$ .

42. (A班) 将函数  $f(x) = \frac{1}{x^2+3x+2}$  展开为  $(x-1)$  的幂级数, 并求其收敛域.

参考答案:  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}}\right) (x-1)^n$ ,  $(-1 < x < 3)$ .

43. 级数  $\sum_{n=2}^{\infty} \sin\left(n\pi + \frac{1}{\ln n}\right)$  是绝对收敛, 条件收敛, 还是发散?

参考答案: 级数条件收敛.

44. 求幂级数  $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n} (x-1)^n$  的收敛域.

参考答案: 幂级数的收敛域为  $(0, 2]$ .

45. 判断级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln \frac{n+1}{n}$  的敛散性.

参考答案: 条件收敛.

46. 将函数  $f(x) = \ln x$  展开成  $(x-2)$  的幂级数.

参考答案:  $f(x) = \ln 2 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1) \cdot 2^{n+1}} (x-2)^{n+1}$ , 其收敛域为  $0 < x \leq 4$ .

47. 判断级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{b}{a_n}\right)^n$  的敛散性, 其中  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , ( $a > 0, b > 0$ ).

参考答案: 当  $\frac{b}{a} < 1$ , 即  $b < a$  时, 级数收敛; 当  $\frac{b}{a} > 1$ , 即  $b > a$  时, 级数发散; 当  $\frac{b}{a} = 1$ , 即  $b = a$  时, 敛散性不能确定.

48. 将函数  $f(x) = \frac{1}{x^2 + 4x + 3}$  展开成  $(x-1)$  的幂级数.

参考答案:  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{1}{2^{n+2}} - \frac{1}{2^{2n+3}} \right) (x-1)^n$ , ( $-1 < x < 3$ ).

49. 讨论级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{a^n}$  ( $a > 0$ ) 是绝对收敛, 条件收敛, 还是发散.

参考答案:  $a = 1$  时, 级数发散;  $a > 1$  时, 级数绝对收敛;  $a \leq 1$  时, 级数发散.

50. 试求幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$  的收敛域  $I$  与和函数  $S(x)$ , 并求级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2^n}$  的和.

参考答案: 3.

51. [另附] 试求幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$  的收敛域  $I$  与和函数  $S(x)$ , 并求级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$  的和.

参考答案: 2.

52. 判断级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+1}}$  绝对收敛和条件收敛性.

参考答案: 条件收敛.

53. 将函数  $f(x) = \frac{1}{x^2 + 3x + 2}$  展开成  $(x+4)$  的幂级数.

参考答案:  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}} \right) (x+4)^n$ , 收敛域为  $(-6, -2)$ .

54. 判别  $\sum_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{\pi}{4^n}$  的敛散性.

参考答案: 收敛.

55. 判别  $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \cos \frac{2}{n})$  的敛散性.

参考答案: 收敛.

56. 判别  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n+1}$  是否收敛, 若收敛说明是条件收敛还是绝对收敛.

参考答案: 条件收敛.

57. 证明: 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} \sin \frac{2n}{\pi}$  收敛.

58. (A班) 证明:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0$ .

参考答案: 略.

59. 设级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$  收敛, 证明级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{n}$  绝对收敛.

参考答案: 由比较判别法易得.

60. [另附] 设级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛, 证明级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{n^2}$  绝对收敛.

参考答案: 由比较判别法易得.