目录

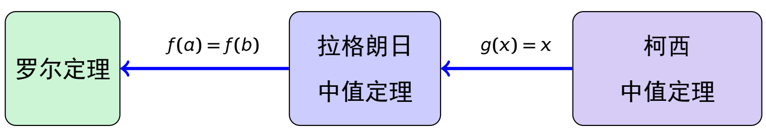
第四章　中值定理及导数的应用

4.1　微分中值定理

本节主要内容：

1. 罗尔定理
2. 拉格朗日中值定理
3. 柯西中值定理

罗尔定理、拉格朗日中值定理及柯西中值定理之间的关系:



4.1.1　罗尔定理

引理（费马引理）**.** 设 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内有定义，且对于 $\forall x \in U(x_0)$，有 $f(x) \le f(x_0)$（或 $f(x) \ge f(x_0)$）. 如果 $f(x)$ 在 x_0 处可导, 则有 $f'(x_0)=0$**.**

证明. 不妨设在 x_0 的某邻域内恒有 $f(x_0) \ge f(x)$，则

$$f'(x_0)=f'_-(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge 0,$$

$$f'(x_0)=f'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le 0,$$

于是，我们有

$$f'(x_0) = f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = 0.$$

定理 (罗尔定理)**.** 如果函数 $f(x)$ 满足条件：

(1) 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，

(2) 在开区间 (a,b) 上可导，

(3) 在端点处 $f(a) = f(b)$，

则至少存在一点 $\xi \in (a,b)$，使得 $f'(\xi) = 0$.

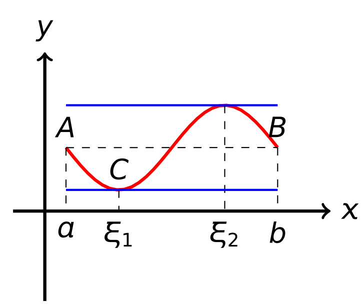
导数为零的点称为函数的驻点或稳定点.

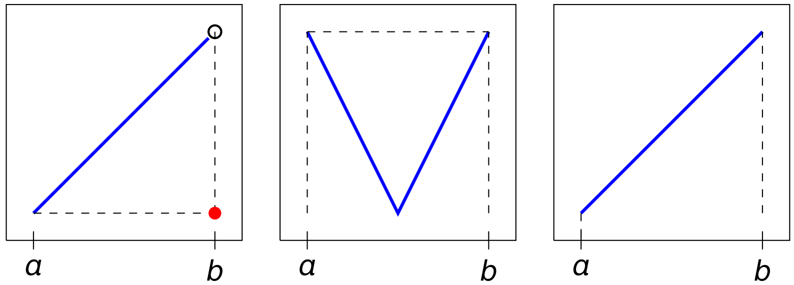
证明. 因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，所以 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有最大值和最小值，分别记为 M、m.

1. 若 $M = m$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上为常数，显然结论成立.
2. 若 $M > m$, 因为 $f(a) = f(b)$，所以 M 或 m 至少有一个在 (a,b) 内的一点 $x = \xi$ 处取得，因此 $f(\xi) \geq f(x)$ 或者 $f(\xi) \leq f(x)$ 必有一个恒成立. 又 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导，由费马引理可得 $f'(\xi) = 0$

如果定理的三个条件有一个不满足，则结论可能不成立.

在弧 $\widehat{AB}$ 上至少有一点 C, 曲线在该点处的切线是水平的.





(a) 缺条件 1　(b) 缺条件 2　(c) 缺条件 3

例 **1.** 证明方程 $x^5-5x+1=0$ 有且仅有一个小于 1 的正实根.

证明. 设 $f(x)=x^5-5x+1$, 则 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续, 且 $f(0)=1$, $f(1)=-3$. 由介值定理存在 $x_0\in(0,1)$, 使 $f(x_0)=0$. 即 x_0 为方程在 $(0,1)$ 上的根.

设另有 $x_1\in(0,1), x_1\neq x_0$, 使 $f(x_1)=0$. 则 $f(x)$ 在 x_0, x_1 之间满足罗尔定理的条件, 因此在 x_0 和 x_1 之间至少存在一个 ξ 使得 $f'(\xi)=0$. 但

$$f'(x)=5\left(x^4-1\right)<0,(x\in(0,1))$$

矛盾, 故 x_0 为 $(0,1)$ 上的唯一实根.

练习**.** 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 上可导，而且 $f(0)=0$，$f(1)=1$．证明：存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=2\xi$.

答案**.** 令 $g(x)=f(x)-x^2$, 由罗尔定理易得结论.

4.1.2 拉格朗日定理

定理 (拉格朗日中值定理)**.** 如果函数 $f(x)$ 满足下列条件：

(1) 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,

(2) 在开区间 (a,b) 内可导,

则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

证明. 令 $F(x)=f(x)-f(a)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$, 则 $f(x)$ 满足：

1. $F(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,
2. $F(x)$ 在开区间 (a,b) 内可导,
3. $F(a)=F(b)=0$.

由罗尔定理可得，$\exists\ \xi\in(a,b)$，使得 $F'(\xi)=0$，即

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

几点说明：

1. 当 $f(a)=f(b)$ 时, 拉格朗日中值定理即为罗尔定理.
2. 拉格朗日中值定理的两个条件是使结论成立的充分不必要条件.
3. 拉格朗日中值定理的结论可以改写为:$\exists\ \xi\in(a,b)$, 使得

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)\qquad \text{(拉格朗日中值公式)}$$

拉格朗日中值公式精确地表达了函数在一个区间上的增量与函数在这区间内某点处的导数之间的关系.

例 **2.** 对函数 $f(x)=x^3$ 在区间 $[0,1]$ 上验证拉格朗日定理.

练习 **1.** 对 $f(x)=x^3+x$ 在区间 $[-1,1]$ 上验证拉格朗日定理.

例 **3.** 证明当 $x_2>x_1$ 时不等式成立：

$$\arctan x_2-\arctan x_1\le x_2-x_1.$$

证明. 由拉格朗日定可得:

$$\frac{\arctan x_2-\arctan x_1}{x_2-x_1}=(\arctan(x))'|_{x=\xi}=\frac{1}{1+\xi^2}\le 1,$$

故结论显然成立.

练习 **2.** 证明：当 $x_2 > x_1$ 时有

$$\sin x_2 - \sin x_1 \leq x_2 - x_1.$$

答案**.** 由拉格朗日定可得*:*

$$\frac{\sin x_2 - \sin x_1}{x_2 - x_1} = \cos(\xi) \leq 1,$$

故结论显然成立*.*

推论 **1.** 如果函数 $f(x)$ 在区间 I 上的导数恒为 0，那么 $f(x)$ 在区间 I 上是一个常数**.**

证明*.* 设 x_1, x_2 为 I 内任意两点 $(x_1 < x_2)$. 在 $[x_1, x_2]$ 上应用拉格朗日中值定理, 有

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) \quad (x_1 < \xi < x_2)$$

因为 $f'(x) = 0$, 所以 $f'(\xi) = 0$, 从而

$$f(x_2) - f(x_1) = 0, \quad \text{即} f(x_2) = f(x_1)$$

由于任意两点的函数值相等, 必有

$$f(x) = C.$$

例 **4.** 证明 $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ $(-1 \leq x \leq 1)$*.*

证明*.* 设 $f(x) = \arcsin x + \arccos x$, $x \in [-1, 1]$**.** 易知

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = 0.$$

故

$$f(x) \equiv C, \ x \in [-1, 1].$$

又

$$f(0) = \arcsin 0 + \arccos 0 = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2},$$

即 $C = \frac{\pi}{2}$. 所以

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

4.1.3 柯西中值定理

定理 (柯西中值定理)**.** 如果函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 满足下列条件:

(1) 在闭区间 $[a,b]$ 上都连续,

(2) 在开区间 (a,b) 内都可导,

(3) 在开区间 (a,b) 内 $g'(x)\neq 0$,

则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使得 $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

注记**.** 拉格朗日中值定理是柯西中值定理的特殊情况.

证明. 作辅助函数

$$\varphi(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}[g(x)-g(a)],$$

易知 $\varphi(x)$ 满足罗尔定理的条件, 所以在 (a,b) 内至少存在一点 ξ, 使得 $\varphi'(\xi)=0$. 即

$$f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\cdot g'(\xi)=0,$$

所以

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

例 **5.** 对函数 $f(x)=x^3$ 和 $g(x)=x^2+1$ 在区间 $[1,2]$ 上验证柯西定理.

例 **6.** 设函数 $f(x)$ 在 *[0,1]* 上连续, 在 *(0,1)* 内可导, 证明: 至少存在一点 $\xi\in(0,1)$, 使 $f'(\xi)=2\xi[f(1)-f(0)]$.

证明. 分析: 结论可变形为

$$\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=\frac{f'(\xi)}{2\xi}=\left.\frac{f'(x)}{(x^2)'}\right|_{x=\xi}.$$

设 $g(x)=x^2$, 则 $f(x)$, $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上满足柯西中值定理的条件, 所以在 $(0,1)$ 内至少存在一点, 有

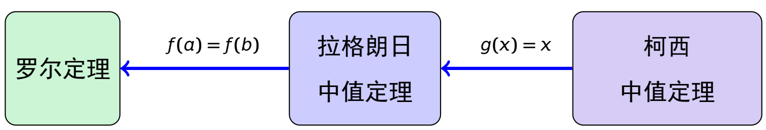
$$\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=\frac{f'(\xi)}{2\xi}\quad 即\ f'(\xi)=2\xi[f(1)-f(0)].$$

4.1.4　小结

本节主要内容：

1. 罗尔定理
2. 拉格朗日中值定理
3. 柯西中值定理

罗尔定理、拉格朗日中值定理及柯西中值定理之间的关系:



4.2　洛必达法则

在一定条件下，我们有下面的洛必达法则：

$$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

未定式是指如果当 $x\to x_0$(或者 $\to\infty$) 时，两个函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都趋于零或者趋于无穷大，那么极限 $\lim[f(x)/g(x)]$ ($x\to x_0$ 或者 $x\to\infty$) 可能存在，也可能不存在，通常把这种极限称为未定式，也称未定型.

常见的未定型有：

(1) $\frac{0}{0}$型 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$

(2) $\frac{\infty}{\infty}$型 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+3}{5x+3}$

(3) $0\cdot\infty$ 和$\infty-\infty$型 $\lim\limits_{x\to 0^+}x^2\ln x$, $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$

(4) 0^0、1^∞ 和∞^0型 $\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\sin x}$, $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{x-1}},\ldots$

4.2.1 $\frac{0}{0}$ 型的洛必达法则

定理 **1.** 如果函数 $f(x)$, $g(x)$ 满足

1. $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$;
2. $f(x)$, $g(x)$ 在点 a 的某去心邻域可导, 且 $g'(x)\neq 0$;
3. $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A($ 或为 $\infty)$.

则有 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A($ 或 $\infty)$.

这种在一定条件下通过分子分母分别求导再求极限来确定未定式的值的方法称为洛必达法则.

证明. 补充定义 $f(a)=g(a)=0$ 不会影响极限，从而 $f(x)$, $g(x)$ 在以 a 和 x 为端点的闭区间上满足柯西中值定理的条件, 因此有

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f(x)}{g(x)}\quad(\xi\text{在}a\text{与}x\text{之间})$$

显然当 $x\to a$ 时 ,$\xi\to a$, 对上式取极限, 有

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\lim_{\xi\to a}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

即

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

从而定理得证.

几点注意事项：

1. $x\to a$ 改为 $x\to\infty$ 仍然成立.
2. 只能对未定式使用洛必达法则，否则讲会出现错误.
3. 如果 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 仍为未定式，在满足条件的前提下，可以继续对 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 使用洛必达法则.

例 **1.** 求极限 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{x^2-4}$. .... $\dfrac{5}{4}$.

例 **2.** 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^a-1}{x}$. .... a.

例 **3.** 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x^2-x}$. .... -1.

例 **4.** 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$. .... $\dfrac{1}{6}$.

例 **5.** 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x^2}$. .... ∞.

练习 **1.** 用洛必达法则求函数极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$ .... $\dfrac{3}{2}$.

(2) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$ .... $\dfrac{1}{4}$.

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 5x}$ .... $\dfrac{3}{5}$.

注记 **1.** 对于 $x\to 0$ 时的 $\frac{0}{0}$ 型极限，现在我们有两种方法可以使用：

1. 等价无穷小量代换

2. 洛必达法则

一般地，应该优先使用等价无穷小代换，因为洛必达法则可能使式子变得复杂.

例 **6.** 求函数极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\tan 6x}$ ······ $\dfrac{1}{2}$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x-\sin x}-1}{\arcsin(x^3)}$ ······ $\dfrac{1}{6}$.

练习 **2.** 求函数极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x\cos x}{\sin^3 x}$ ······ $\dfrac{1}{3}$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{1+x^3}-1}{1-\cos\sqrt{x-\sin x}}$ ······ 6.

4.2.2 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的洛必达法则

定理 **2.** 如果函数 $f(x)$, $g(x)$ 满足

1. $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$;

2. $f(x),g(x)$ 在点 a 的某去心邻域内可导, 且 $g'(x)\neq 0$;

3. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A($ 或 $\infty)$.

则有

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

在上述定理中，$x\to a$ 改为 $x\to\infty$ 仍然成立.

例 **7.** 求函数的极限.

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+x+1}{3x^2-x+4}$. .... $\dfrac{2}{3}$.

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^n}$（$n>0$） .... 0.

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{e^x}$ .... 0.

练习 **3.** 求函数极限：

(1) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln\sin x}{\ln x}$ .... 1.

(2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\tan x}{\tan 3x}$ .... 3.

注记 **2.** 洛必达法则未必总是有效. 例如：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}$　　(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$

4.2.3　$0\cdot\infty$ 型和 $\infty-\infty$ 型的未定式

对于 $0\cdot\infty$ 型和 $\infty-\infty$ 型的未定式，我们可以将它们变换为 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的未定式，然后使用洛必达法则.

例 **8.** 求函数极限：

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\dfrac{\pi}{2}-\arctan x\right)$ .... 1.

(2) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$ .... $-\frac{1}{2}$.

练习 **4.** 求函数极限：

(1) $\lim\limits_{x\to0^+}x^2\ln x$ 0

(2) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$ .... $\dfrac{1}{2}$

4.2.4 1^∞ 型，0^0 型和 ∞^0 型的未定式

对于 1^∞ 型，0^0 型和 ∞^0 型的未定式，我们可以将它们变换为 $0\cdot\infty$ 型未定式，进而化为 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型，然后使用洛必达法则.

$$\lim u(x)^{v(x)} = \lim \mathrm{e}^{v(x)\ln u(x)} = \mathrm{e}^{\lim v(x)\ln u(x)}$$

例 **9.** 求函数极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}}$ .... e.

(2) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$ .... 1.

(3) $\lim\limits_{x\to +\infty} (1+\mathrm{e}^x)^{\frac{1}{x}}$ .... e.

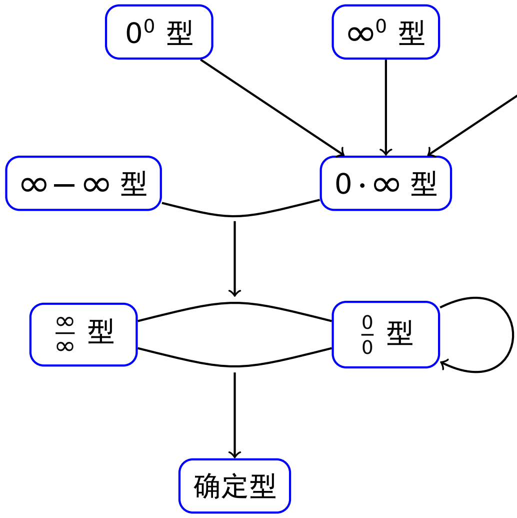
练习 **5.** 求函数极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0} (1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$ .... e

(2) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}}$ 1

(3) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\sin x}$ 1

4.2.5 小结



思考. 设 $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ 是不定型极限，如果 $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 的极限不存在, $\frac{f(x)}{g(x)}$ 的极限是否也一定不存在？举例说明.

答案. 不一定，例如 $f(x)=x+\sin x$, $g(x)=x$.

4.3 导数的应用

4.3.1 函数的单调性

定理 **1.** 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 上可导，那么

1. 如果在 (a,b) 上恒有 $f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加.
2. 如果在 (a,b) 上恒有 $f'(x)<0$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调减少.

证明. 由拉格朗日中值定理易证.

若 $f'(x)\geq 0$ (≤ 0) 在 (a,b) 上成立，且等号仅在仅在个别点成立，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加 (减少)

定义. 若函数在其定义域的某个区间内是单调的，则该区间称为函数的单调区间.

单调区间的求法:

利用导数等于零的点和不可导点，划分出区间，然后判断各区间内导数的符号.

例 1. 确定下列函数的单调增减区间.

(1) $f(x)=x^3-3x$　　*(2)* $f(x)=x^3$

解. *(1)* 单调增区间 $(1,+\infty)$, $(-\infty,-1)$；单调减区间 $[-1,1]$;

(2) 单调增区间 $(-\infty,+\infty)$.

练习 1. 确定下列函数的单调增减区间.

(1) $y=3x^2+6x+5$　　*(2)* $y=x-\mathrm{e}^x$

答案. *(1)* 单调增区间 $(-1,+\infty)$, 单调减区间 $(-\infty,-1)$.

(2) 单调增区间 $(0,+\infty)$, 单调减区间 $(-\infty,0)$.

例 2. 证明函数 $y=x-\ln(1+x^2)$ 单调增加.

证明. 易知

$$y'=1-\frac{2x}{1+x^2}\geq 0,$$

上式等号仅在 $x=1$ 时成立，结论显然成立.

练习 2. 证明函数 $y=\sin x-x$ 单调减少.

答案. 易知

$$y'=\cos x-1\leq 0,$$

且导数等于 0 仅在离散的点上成立，故结论成立.

思路：构造函数，使 $f(x)>(\geq)f(a)$, 或者 $f(x)<(\leq)f(a)$.

例 3. 证明当 $x>0$ 时有不等式 $\mathrm{e}^x>1+x$.

练习 3. 证明当 $x>1$ 时有 $3-\dfrac{1}{x}<2\sqrt{x}$.

选择**.** 设在 $[0,1]$ 上 $f''(x)>0$, 则 $f'(0)$, $f'(1)$, $f(1)-f(0)$ 或 $f(0)-f(1)$ 的大小顺序是 *(B)*

(A) $f'(1)>f'(0)>f(1)-f(0)$

(B) $f'(1)>f(1)-f(0)>f'(0)$

(C) $f(1)-f(0)>f'(1)>f'(0)$

(D) $f'(1)>f(0)-f(1)>f'(0)$

提示：利用 $f''(x)>0$ 得到 $f'(x)$ 单调增加.

再用中值定理得到 $f(1)-f(0)=f'(\xi)$，$0<\xi<1$.

4.3.2 函数的极值

定义 **1.** 设 $f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域有定义.

1. 若对 x_0 某个去心邻域的任何 x，总有 $f(x)<f(x_0)$，则称 x_0 为 $f(x)$ 的一个极大值点，$f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的一个极大值.
2. 若对 x_0 某个去心邻域的任何 x，总有 $f(x)>f(x_0)$，则称 x_0 为 $f(x)$ 的一个极小值点，$f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的一个极小值.

极大值点和极小值点统称为极值点，极大值和极小值统称为极值.

定理 **2** (极值的必要条件)**.** 设 $f(x)$ 在 x_0 点可导，而且在 x_0 处取得极值，则 $f'(x_0)=0$.

注记**.** 我们称导数为零的点为驻点.

- 驻点未必都是极值点：比如 $y=x^3$.
- 极值点未必都是驻点：比如 $y=|x|$.
- 可导函数的极值点一定是驻点.

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,3)$	3	$(3,\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	极大值	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

- 极大值不一定比极小值大.

定理 **3** (极值的第一充分条件)**.** 设 $f(x)$ 在 x_0 点连续, 而且在它的某个去心邻域内可导.

1. 若在 x_0 的左邻域内 $f'(x)>0$，在右邻域内 $f'(x)<0$，则 x_0 为极大值点.
2. 若在 x_0 的左邻域内 $f'(x)<0$，在右邻域内 $f'(x)>0$，则 x_0 为极小值点.
3. 若在 x_0 的左邻域内和右邻域内 $f'(x)$ 的符号不变，则 x_0 不是极值点.

证明. 由单调性易得.

例 **4.** 求出函数 $f(x)=x^3-3x^2-9x+5$ 的极值.

解**.** 易知：

$$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3),$$

令 $f'(x)=0$, 得驻点 $x_1=-1, x_2=3$.

列表讨论

故极大值 $f(-1)=10$, 极小值 $f(3)=-22$.

练习 **4.** 求函数的单调增减区间和极值.

(1) $f(x)=x^3-3x^2+7$

注意：函数的不可导点也可能是极值点，如 $y=1-(x-2)^{2/3}$ 在 $x=2$ 处取得极大值.

定理 **4.** 判别极值的第二充分条件 设 $f'(x_0)=0$ 而且 $f''(x_0)$ 存在.

1. 若 $f''(x_0)>0$，则 x_0 为 $f(x)$ 的极小值点.
2. 若 $f''(x_0)<0$，则 x_0 为 $f(x)$ 的极大值点.

证明. 由二阶导数的定义，易推出极值的第一充分条件.

注记 **1.** 当 $f''(x_0)=0$ 时，上面的定理无法判定. 例如 $f(x)=x^3$ 和 $f(x)=x^4$.

例 **5.** 求出函数 $f(x)=x^3+3x^2-24x-20$ 的极值.

解**.** 易知

$$f'(x)=3x^2+6x-24=3(x+4)(x-2),$$

令 $f'(x)=0$, 得驻点 $x_1=-4, x_2=2$. 又 $f(x)$ 的二阶导数为 $f''(x)=6x+6$,

1. 因为 $f''(-4)=-18<0$, 所以极大值为 $f(-4)=60$.

2. 因为 $f''(2)=18>0$, 所以极小值为 $f(2)=-48$.

练习 **5.** 用判别极值的第二充分条件求求函数的极值：

$$y=x^3-3x^2-9x-5$$

求函数极值的一般步骤：

1. 求导数 $f'(x)$;
2. 找出驻点（即方程 $f'(x)=0$ 的根）和不可导点;
3. 判断:
   - 驻点 $\left\langle \begin{array}{ll} f''(x_0)\neq 0 & \text{第一或第二充分条件} \\ f''(x_0)=0 & \text{第一充分条件} \end{array}\right.$
   - 不可导点：第一充分条件;
4. 结论.

注意格式: 极大 (小) 值为 $f(x_0)=a$ 或极大 (小) 值点为 $x=x_0$.

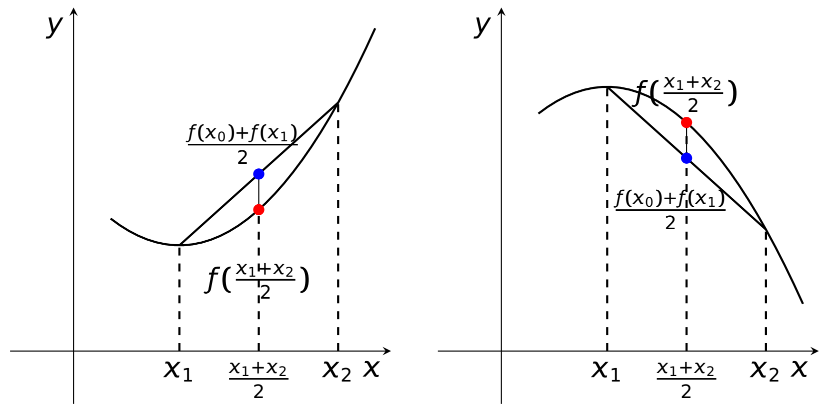
选择**.** 设函数 $f(x)$ 满足 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}=-1$，则在点 a 处 *(C)*

(A) $f(x)$ 的导数存在，且 $f'(a)\neq 0$

(B) $f(x)$ 的导数不存在

(C) $f(x)$ 取得极大值

(D) $f(x)$ 取得极小值



(a) 凹函数　　(b) 凸函数

4.3.3　曲线的凹凸性与拐点

定义. 设 $f(x)$ 在区间 I 上连续, 如果对 I 上任意两点 x_1,x_2, 恒有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]$$

那么称 $f(x)$ 在 I 上的图形是凹的 *(* 或凹弧*)*; 如果恒有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > \frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]$$

那么称 $f(x)$ 在 I 上的图形是凸的 *(* 或凸弧*).*

定理 **5.** 假设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上有二阶导数，那么

1. 如果 $x\in(a,b)$ 时，恒有 $f''(x)>0$，则函数的曲线在 (a,b) 上是凹的.

2. 如果 $x\in(a,b)$ 时，恒有 $f''(x)<0$，则函数的曲线在 (a,b) 上是凸的.

证明. 略

例 **6.** 判断曲线 $y=x^3$ 的凹凸性.

解. 易知

$$y'=3x^2,\quad y''=6x,$$

1. 当 $x<0$ 时, $y''<0$, 因此曲线在 $(-\infty,0]$ 为凸的;

2. 当 $x>0$ 时, $y''>0$, 因此曲线在 $[0,+\infty)$ 为凹的.

注意到, 点 (0,0) 是曲线由凸变凹的分界点.

定义. 曲线凹和凸的分界点 (x_0,y_0) 称为拐点.

性质. 在拐点 (x_0,y_0) 处，要么 $f''(x_0)=0$，要么 $f''(x_0)$ 不存在.

性质. 拐点处的切线必在拐点处穿过曲线.

. . . .

例 **7.** 求曲线 $y=\sqrt[3]{x}$ 的凹凸区间和拐点.

注记 **2.** (x_0,y_0) 为拐点 $\not\Longrightarrow$ $f''(x_0)=0$. *(二阶导数不存在)*

例 **8.** 求曲线 $y=x^4$ 的凹凸区间和拐点.

注记 **3.** $f''(x_0)=0$ $\not\Longrightarrow$ (x_0,y_0) 为拐点. *(二阶导数除在 $x=0$ 处均大于零)*

$f(x)$ 在 x_0 的邻域内二阶可导，且 $f''(x_0)=0$，

1. 若 x_0 两边 $f''(x)$ 变号，则 $(x_0,f(x_0))$ 为拐点.

2. 若 $f'''(x_0)\neq 0$, 则 $(x_0,f(x_0))$ 为拐点.

例 **9.** 求曲线 $y=3x^4-4x^3+1$ 的凹凸区间和拐点.

解. 易知:

$$y'=12x^3-12x^2,\ y''=36x(x-2/3).$$

令 $y''=0$ 得 $x_1=0$, $x_2=2/3$. 于是

拐点为 $(0,1)$ 和 $(2/3,11/27)$.

练习 **6.** 求下列曲线的凹凸区间和拐点.

(1) $y=x^2-x^3$ *(2)* $y=\mathrm{e}^{-x}$

答案. *(1)* 凹区间为 $(-\infty,1/3)$, 凸区间为 $(1/3,+\infty)$,

拐点为 $(1/3,2/27)$.

(2) 凹区间为 $(-\infty,+\infty)$.

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,2/3)$	$2/3$	$(2/3,+\infty)$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	凹的	拐点	凸的	拐点	凹的

4.3.4 函数图形的描绘

如果在函数 $f(x)$ 的定义域上的某个小区间中,

1. 曲线是上升 (或下降) 的; $\Longleftarrow$ 一阶导数
2. 曲线是凹的 (或凸的) ; $\Longleftarrow$ 二阶导数
3. 区间端点的位置已知或变化趋势已知; $\Longleftarrow$ 渐近线

那么, 我们很容易画出函数在这个区间内的图形.

定义. 给定曲线 $y=f(x)$, 如果曲线上的一动点沿着曲线趋于无穷远时, 该点与某定直线 L 的距离趋于 0, 则称此直线 L 为该曲线 $y=f(x)$ 的渐近线.

1. 水平渐近线
2. 铅直渐近线
3. 斜渐近线

定义. *1.* 若 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=b$，称 $y=b$ 为其水平渐近线.

2. 若 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$，称 $x=a$ 为其铅直渐近线.

注记. (1) $x\to\infty$ 可以改为 $x\to+\infty$ 或 $x\to-\infty$.

(2) $x\to a$ 可以改为 $x\to a^+$ 或 $x\to a^-$.

例 **10.** 求曲线 $y=\dfrac{1}{x-1}$ 的水平和铅直渐近线.

解. 水平渐近线：$y=0$, 铅直渐近线：$x=1$.

练习 **7.** 求曲线 $y=\dfrac{-x^2+x+1}{x^2}$ 的水平和铅直渐近线.

答案**.** 水平渐近线：$y=-1$, 铅直渐近线：$x=0$.

定义 **2** (斜渐近线)**.** 若直线 $y=kx+b$（$k\neq 0$）满足

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-(kx+b)]=0,$$

则称它是曲线 $y=f(x)$ 的一条斜渐近线**.**

定理 **6.** 直线 $y=kx+b$ 是曲线 $y=f(x)$ 的斜渐近线，当且仅当

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=k \quad \text{而且} \quad \lim_{x\to\infty}[f(x)-kx]=b.$$

注记**.** $x\to\infty$ 可以改为 $x\to+\infty$ 或 $x\to-\infty$**.**

例 **11.** 求曲线 $y=\dfrac{x^2}{x+1}$ 的斜渐近线.

解**.** $y=x-1$.

练习 **8.** 求曲线 $y=\dfrac{x^3}{(x-1)^2}$ 的斜渐近线.

解**.** $y=x+2$.

函数图形描绘的一般步骤：

1. 确定函数 $y=f(x)$ 的定义域, 观察函数的奇偶性、周期性、曲线与坐标轴交点等性态, 求出函数的一阶导数 $f'(x)$ 和二阶导数 $f''(x)$;
2. 求出方程 $f'(x)=0$ 和 $f''(x)=0$ 在函数定义域内的全部实根，用这些根以及函数的间断点或阶导、二阶导数不存在的点把函数的定义域划分成若干个区间.
3. 确定在各个区间内 $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 的符号，并由此确定函数的形态;
4. 确定函数的水平、铅值渐近线、斜渐近线以及其他变化趋势;
5. 描出与方程 $f'(x)=0$ 和 $f''(x)=0$ 的根对应的曲线上的点，有时还需要补充一些点，绘出渐近线，再结合第三步讨论的结果画出函数的图形.

例 **12.** 作函数 $y=x^3-3x^2+6$ 的图形.

解**.** 由条件可得

1. 函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$, 且

$$y'=3x^2-6x=3x(x-2),\ y''=6x-6=6(x-1)$$

2. 令 $y'=0$ 得 $x_1=0,x_2=2$; 令 $y''=0$ 得 $x_3=1$.

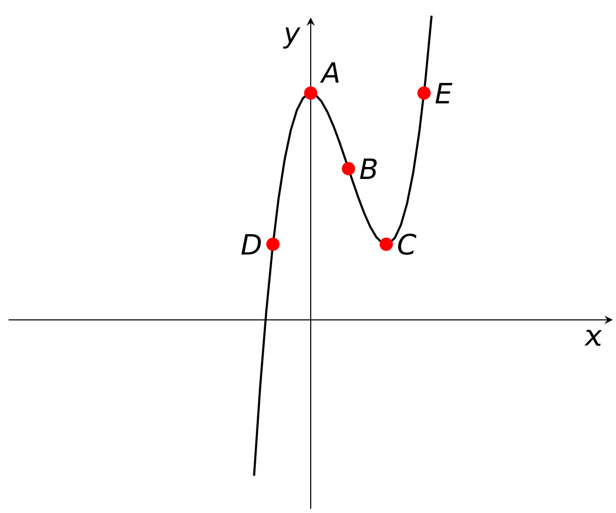
3. 单调性、凹凸性、极值和拋点列表如下：

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,2)$	2	$(2,+\infty)$
y'	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y''	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
y	凸增	极大	凸减	拐点	凹减	极小	凹增

4. 变化趋势为:

当 $x\to-\infty$ 时, $y\to-\infty$; 当 $x\to+\infty$ 时 ,$y\to+\infty$;

5. 描点 : $A(0,6),B(1,4),C(2,2)$, 为了确定函数在 $(-\infty,0)$ 和 $(2,+\infty)$ 上的图形, 增加辅助作图点 $D(-1,2)$, $E(3,6)$, 作出函数的图形**.**



例 **13.** 作函数 $f(x)=\dfrac{4(x+1)}{x^2}-2$ 的图形**.**

x	$(-\infty,-3)$	-3	$(-3,-2)$	-2	$(-2,0)$	0	$(0,\infty)$
$f'(x)$	$-$		$-$	0	$+$	不存在	$-$
$f''(x)$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$f(x)$	凸	拐	凹	极	凹	间断	凹

解. 易知 $f(x)$ 的定义域为 $D=\{x|x\neq 0\},$，其为非奇非偶函数, 且无对称性.

$$f'(x)=-\frac{4(x+2)}{x^3},\ f''(x)=\frac{8(x+3)}{x^4}.$$

令 $f'(x)=0$, 得驻点 $x=-2$, 令 $f''(x)=0$, 得特殊点 $x=-3$. 又因为

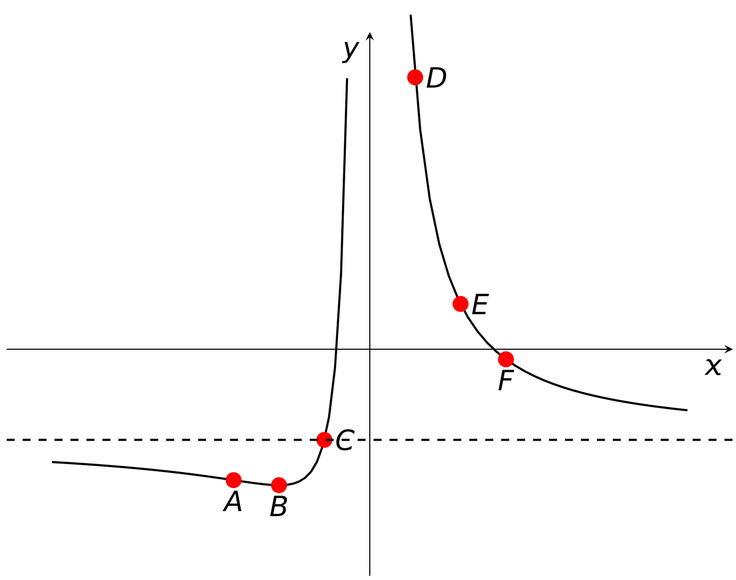
$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{4(x+1)}{x^2}-2\right]=-2,$$

得水平渐近线 $y=-2$;

由

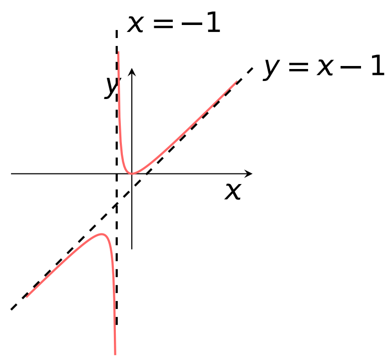
$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left[\frac{4(x+1)}{x^2}-2\right]=+\infty$$

得铅直渐近线 $x=0$. 列表确定函数升降区间, 凹凸区间及极值点和拐点: 描点作图:$A(-3,-26/9)$, $B(-2,-3)$, $C(-1,-2)$, $D(1,6)$, $E(2,1)$, $F(3,-2/9)$.



练习 **9.** 描绘函数 $y=\dfrac{x^2}{x+1}$ 的曲线.

答案.



4.3.5　小结

1. 函数的单调性 $\Longleftarrow$ 一阶导数
2. 函数的极值 $\Longleftarrow$ 驻点以及不可导点为可疑点 判别法 $=\begin{cases}\text{第一充分条件}\\ \text{第二充分条件}\end{cases}$
3. 曲线的凹凸性与拐点 $\Longleftarrow$ 二阶导数 函数凹凸性的判断以及拐点的两种求法
4. 函数的图形 $\Longleftarrow$ 导数的综合运用

思考. 若 $f'(0)>0$, 是否能判定 $f(x)$ 在原点的充分小的邻域内单调递增?

答案. 不能断定. 例 $f(x)=\begin{cases}x+2x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ 易知

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\left(1+2\cdot\Delta x\cdot\sin\frac{1}{\Delta x}\right)=1>0$$

$$f'(x)=1+4x\sin\frac{1}{x}-2\cos\frac{1}{x},\ x\neq 0$$

1. 当 $x=\dfrac{1}{2k\pi}$ 时, $f'(x)=-1<0$;

2. 当 $x = \frac{1}{\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi}$ 时, $f'(x) = 1 + \frac{4}{\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi} > 0$

注意 k 可以任意大, 故在 $x_0 = 0$ 点的任何邻域内, $f(x)$ 都不单调递增.

4.4 函数的最大值和最小值

4.4.1 函数的最大值与最小值

定义 **1** (函数的最值)**.** 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义. 如果有 $x_0 \in I$，使得对所有 $x \in I$ 都有 $f(x) \le f(x_0)$ （或 $f(x) \ge f(x_0)$），则称 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 在区间 I 上的最大值（或最小值）.

经济问题中，经常有这样的问题，怎样才能使“产品最多”、“用料最少”、“成本最低”、“效益最高”等等. 这样的问题在数学中有时可归结为求某一函数 (称为目标函数) 的最大值或最小值问题.

根据自变量的取值范围，可以分以下两种情况讨论：

1. 目标函数在闭区间连续
2. 目标函数在开区间连续

设目标函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，而且在除有限个点外都可导. 则可按照下面步骤求出函数的最值：

1. 求出函数所有的驻点，不可导点，和区间端点一起列出来作为最值可疑点.
2. 求出函数在这些点的取值并比较，最大（小）者就为函数的最大（小）值.

例 **1.** 求以下函数在指定区间上的最值.

(1) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 7$ 在区间 $[-2, 3]$ 上.

练习 **1.** 求以下函数在指定区间上的最值.

(1) $f(x)=x^4-2x^2+5$ 在区间 $[-2,3]$ 上.

开区间的连续函数不一定有最大、最小值．即使有最大值、最小值，也不能用上述方法求出．若函数满足下列两个条件：

1. $f(x)$ 在开区间有且仅有最大（小）值;
2. $f(x)$ 在开区间只有一个可能取得极值的点

则可以断定这个极值点一定是函数的最大（小）值点.

例 **2.** 将边长为 a 的一块正方形铁皮，四角各截去一个大小相同的小正方形，然后将四边折起做成一个无盖的方盒．问截掉的小正方形的长为多少时，所得方盒的容积最大？

练习 **2.** 一房地产公司有 50 套公寓要出租．当月租定为 2000 元时，公寓会全部租出去．当月租每增加 100 元，就会多剩一套公寓租不出去．而租出去的每套公寓每月需要花费 200 元的维修费用．问房租定为多少时可获得最大收入？

4.4.2　经济应用问题举例

在经济学中，总收入和总成本都可以表示为产量 Q 的函数，分别记为 $R(Q)$ 和 $C(Q)$, 则总利润 $L(Q)$ 可表示为 $L(Q)=R(Q)-C(Q)$ 为使总利润最大，须令其一阶导数等于零, 即

$$\frac{\mathrm{d}L(Q)}{\mathrm{d}Q}=\frac{\mathrm{d}[R(Q)-C(Q)]}{\mathrm{d}Q}=0,$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}R(Q)}{\mathrm{d}Q}=\frac{\mathrm{d}C(Q)}{\mathrm{d}Q},$$

即取得最大利润的必要条件为：

$$\text{边际收益}=\text{边际成本}.$$

显然，为使总利润达到最大，还应有

$$\frac{d^2[R(Q)-C(Q)]}{dQ^2}<0,$$

即
$$R''(Q) < C''(Q),$$
也即
$$\text{边际收益的变化率} < \text{边际成本的变化率}.$$

例 **3.** 某厂每批生产 A 商品 X 台的费用为 $C(X) = 5X + 200$ (万元)，得到的收入为 $R(X) = 10X - 0.01X^2$ (万元)，问每批生产多少台，才能使利润最大?

解**.** 设利润为 $L(X)$, 则
$$L(X) = R(X) - C(X) = 5X - 0.01X^2 - 200$$
$$L'(X) = 5 - 0.02X$$
令 $L'(X) = 0$, 解得 $X = 250$(台)，由于
$$L''(X) = -0.02 < 0$$
所以 $L(250) = 425$(万元) 为极大值，也就是最大值.

练习 **3.** 设某厂的成本函数为 $C(Q) = aQ^2 + bQ + c$, 需求函数为 $Q = (d - P)/e$, 其中 $C(Q)$ 为成本, Q 为需求量产量, P 为价格, a, b, c, d, e 均为正常数, 且 $d > b$, 求利润最大时的产量及最大利润.

答案**.** 由 $Q = (d - p)/e$, 得 $P = d - eQ$, 故得收益函数
$$R(Q) = Q \cdot P = Q(d - eQ)$$
利润函数为
$$\begin{aligned} L(Q) &= R(Q) - C(Q) \\ &= (d - b)Q - (\mathrm{e} + a)Q^2 - c \end{aligned}$$
于是
$$L'(Q) = (d - b) - 2(\mathrm{e} + a)Q.$$
令 $L'(Q) = 0$ 得唯一驻点 $Q_0 = (d - b)/2(e + a)$.

又 $L'' = -2(e + a) < 0$, 故
$$Q = Q_0 = (d - b)/2(\mathrm{e} + a)$$

时利润最大, 最大值为

$$L(Q_0) = L[(a-b)/2(e+a)]$$
$$= \left[(d-b)^2/4(e+a)\right] - c$$

例 **4.** 最大收益问题某商品的需求函数为 $Q = Q(P) = 75 - P^2$, 问 P 为多少时，总收益最大?

解**.** 总收益为

$$R(P) = QP = \left(75 - P^2\right) P$$

令

$$R'(P) = 75 - 3P^2 = 0$$

得唯一驻点 $P = 5$, 又

$$R''(P)|_{P=5} = -30 < 0,$$

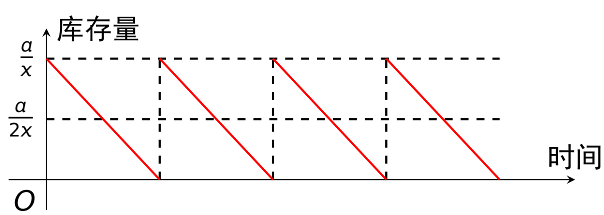
故 $P = 5$ 时收益最大.

所谓经济批量问题就是确定合理的采购进货的批量，使库存费用和采购费用之和最小.

例 **5.** 某商场每年销售某商品 a 件, 分为 x 批采购进货. 已知每批采购费用为 b 元, 而未售商品的库存费用为 c 元/(年・件). 设销售商品是均匀的, 问分多少批进货时, 才能使以上两种费用的总和为最省? (a, b, c 为常数且 $a, b, c > 0$.)

解**.** 显然, 采购进货的费用

$$W_1(x) = bx$$



因为销售均匀, 所以平均库存的商品数应为每批进货的商品数 $\dfrac{a}{x}$ 的一半 $\dfrac{a}{2x}$, 因而商品的库存费用

$$W_2(x) = \frac{ac}{2x}$$

总费用 $W(x)=W_1(x)+W_2(x)=bx+\dfrac{ac}{2x}\ (x>0)$. 令

$$W'(x)=b-\frac{ac}{2x^2}=0$$

得 $x=\sqrt{\frac{ac}{2b}}$. 又

$$W''(x)=\frac{ac}{x^3}>0$$

所以 $W\left(\sqrt{\frac{ac}{2b}}\right)$ 为 $W(x)$ 的一个最小值. 从而当批数 x 取一个最接近于 $\sqrt{\frac{ac}{2b}}$ 的自然数时, 才能使采购与库存费用之和最省.

例 **6.** 某厂生产某种产品，其年销售量为 *100* 万件，每批生产需要增加准备费 *1000* 元，而每件的一年库存费为 *0.05* 元. 如果年销售率为平均的，且上批售完后立即生产出下批 (此时商品的库存数为批量的一半)，问应分为几批生产，能使采购费用及库存费之和最小？

解. 设批数为 N, 则每批产量为 $x=a/N=\dfrac{10^6}{N}$, 一年生产准备费为 $bN=1000N$. 库存量为 $\dfrac{x}{2}=\dfrac{1000000}{2N}$, 库存费为 $\dfrac{10^6}{2N}\cdot 0.05$ 于是总费用为

$$\begin{aligned}E(N)&=1000N+\frac{10^6}{2N}\cdot 0.05\\&=1000N+\frac{25000}{N},N\in(0,+\infty)\end{aligned}$$

令 $E'(N)=1000-\dfrac{25000}{N^2}=0$ 得 $N=5$ 或 $N=-5$(舍去). 又 $E''(N)=\dfrac{50000}{N^3}>0$, 故 $N=5$ 时总费用最小. 即分 *5* 批生产，能使总费用最小.

设企业某件商品的产量为 x，征税后的总成本为 $C_t(x)$, 每件商品征税为 t, 则

$$C_t(x)=C(x)+tx$$

征税后的利润为

$$L_t(x)=R(x)-C_t(x)=R(x)-C(x)-tx$$

当 $L_t'(x)=0$ 且 $L_t''(x)<0$ 时，有最大值, 此时可解出对应的产量 $x=x(t)$.

此时，政府得到的总税收为 $T=tx=t\cdot x(t)$.

最大税收问题仍为一元函数的最值问题.

例 **7.** 某种商品的平均成本 $\overline{C}(x)=2$, 价格函数为 $P(x)=20-4x$ (x 为商品数量)，国家向企业每件商品征税为 t.

(1) 生产多少商品时, 利润最大?

(2) 在企业取得最大利润的情况下, t 为何值时才能使总税收最大?

解**.** (1) 总成本为：$C(x)=x\overline{C}(x)=2x$,

总收益为：$R(x)=xP(x)=20x-4x^2$,

总税收为：$T(x)=tx$,

故总利润为：$L(x)=R(x)-C(x)-T(x)=(18-t)x-4x^2$.

令 $L'(x)=18-t-8x=0$, 得 $x=\dfrac{18-t}{8}$. 又

$$L''(x)=-8<0$$

所以 $L\left(\dfrac{18-t}{8}\right)=\dfrac{(18-t)^2}{16}$ 为最大利润.

(2) 取得最大利润时的税收为:

$$T=tx=\frac{t(18-t)}{8}=\frac{18t-t^2}{8}\quad (x>0)$$

令

$$T'=\frac{9-t}{4}=0$$

得 $t=9$.

又

$$T''=-\frac{1}{4}<0,$$

所以当 $t=9$ 时, 总税收取得最大值

$$T(9)=\frac{9(18-9)}{8}=\frac{81}{8},$$

此时的总利润为

$$L=\frac{(18-9)^2}{16}=\frac{81}{16}.$$

本节基本概念: 函数的极大值与极小值

1. 当目标函数在闭区间连续时
2. 当目标函数在开区间连续时

极值的经济应用:

1. 最大利润问题
2. 最大收益问题
3. 经济批量问题
4. 最大税收问题

某工厂要在一年内以相等批量分批生产 2400 件产品，产品的单位成本为 6 元，但每生产一批产品需要调整机器费用为 160 元. 在生产过程中，在制品占用资金的银行年利率为 10%. 若全年所需费用等于全年所需机器调整费用与在制品占用资金利息的总和，问批量多大时才能使全年所需费用最小？

答案**.** 设全年所需费用为 $P(x)$, 批量为 x, 则全年批生产的批数为 $\dfrac{2400}{x}$ 所需调整机器费用为 $160\cdot\dfrac{2400}{x}$ 元. 因为批量相同，所以全年商品所占资金的利息为 $6x\times 10\%$ 元，因此

$$\begin{aligned} P(x) &= 6x\times 10\% + 160\times\frac{2400}{x} \\ &= 0.6x + \frac{16\times 24\times 10^3}{x} \\ P' &= 0.6 - \frac{16\times 24\times 10^3}{x^2} \end{aligned}$$

令 $P'(x)=0$, 则 $x^2 = 640000 \therefore P(x)$ 有最小值 . 即全年分 *3* 批生产，每批批量 *800* 件.

4.5　泰勒公式

假设 $f'(x_0)$ 存在．已经知道当 $x\to x_0$ 时有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+o\big(x-x_0\big)$$

是否存在二次多项式 $g(x)$ 使得当 $x\to x_0$ 时有

$$f(x)\overset{?}{=}g(x)+o\left((x-x_0)^2\right)$$

令 $g(x)=A+B(x-x_0)+C(x-x_0)^2$，则有

$$A=f(x_0),\qquad B=f'(x_0),\qquad C=\frac{1}{2}f''(x_0).$$

$$f(x)=A+B(x-x_0)+C(x-x_0)^2+o\left((x-x_0)^2\right)$$

. . . . 令 $x\to x_0$，得到 $A=f(x_0)$，从而

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=B+C(x-x_0)+o(x-x_0).$$

再令 $x\to x_0$，得到 $B=f'(x_0)$．因此

$$\begin{aligned}C&=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)}{(x-x_0)^2}\\&=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{2(x-x_0)}\qquad\boxed{\text{洛必达法则}}\\&=\frac{1}{2}f''(x_0)\qquad\boxed{\text{导数的定义}}\end{aligned}$$

定理 1 (带佩亚诺余项的泰勒公式)**.** 设 $f(x)$ 在 x_0 点存在 n 阶导数，则有

$$\begin{aligned}f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2\\+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o\left((x-x_0)^n\right)\end{aligned}$$

解. 连续用 $n-1$ 次洛必达法则，再用导数的定义．

定理 2 (带拉格朗日余项的泰勒公式)**.** 设 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内存在 $n+1$ 阶导数，

则 $\forall x \in U(x_0)$ 有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x),$$

其中余项 $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$，$\xi$ 介于 x_0 和 x 之间.

证明. 对 $R_n(x)$ 和 $(x-x_0)^{n+1}$ 连续用 $n+1$ 次柯西中值定理.

当 $x_0=0$ 时，泰勒公式称为麦克劳林公式

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x),$$

其中 $R_n(x)=o(x^n)$ .... 佩亚诺余项

或者 $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$ .... 拉格朗日余项

ξ 介于 0 和 x 之间.

令 $\xi=\theta x$，则 $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$, $0<\theta<1$.

例 **1.** 设函数 (x) 在 $[a,b]$ 上二阶可导，且 $f''(x)<0, x_1, x_2$ 为 $[a,b]$ 上任意两点. 证明: $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$.

证明. 设 $x_0=\frac{x_1+x_2}{2}$, 则 $f(x)$ 在 x_0 点的一阶泰勒展式为

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(\xi)}{2}(x-x_0)^2$$

ξ 介于 x 与 x_0 之间, 代入特殊点 x_1 与 x_2, 得

$$f(x_1)=f(x_0)+f'(x_0)(x_1-x_0)+\tfrac{f''(\xi_1)}{2}(x_1-x_0)^2,$$
$$f(x_2)=f(x_0)+f'(x_0)(x_2-x_0)+\tfrac{f''(\xi_2)}{2}(x_2-x_0)^2,$$

其中 ξ_1 介于 x_1 与 x_0 之间, ξ_2 介于 x_2 与 x_0 之间. 两式相加得,

$$f(x_1)+f(x_2)=2f(x_0)+\frac{(x_1-x_2)^2}{8}\left(f''(\xi_1)+f''(\xi_2)\right),$$

$\because f''(x) < 0, x \in (a, b) \quad \therefore f(x_1) + f(x_2) < 2f(x_0)$ 即

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} < f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right).$$

利用泰勒公式证明题目

1. 依题意选定 n, x_0 和 x.

2. 与出相应的泰勒展开式

3. 由展开式推出要证明的结论

若已知一系列点的函数值或导数值，或涉及到二阶或三阶以上的高阶导数，可以考虑用泰勒公式.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_{2n}(x)$$

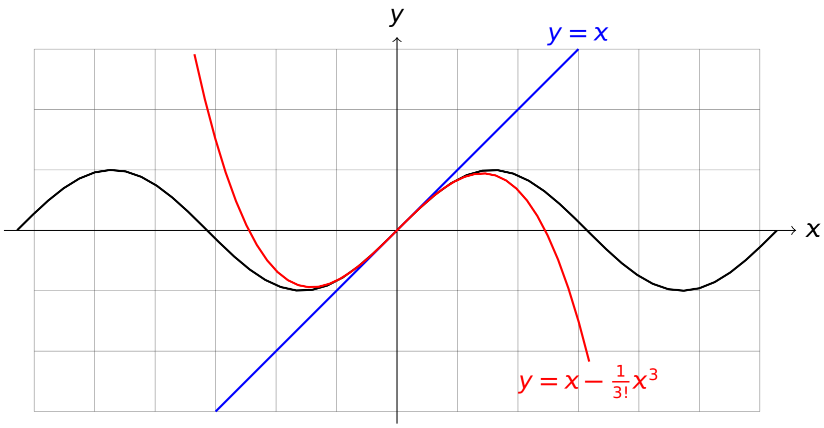
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n+1}(x)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + R_n(x)$$

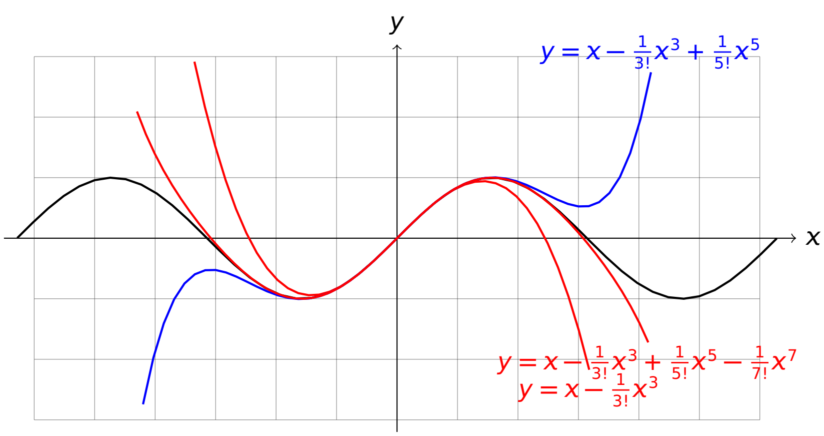
$$(1+x)^\alpha = 1 + C_\alpha^1 x + C_\alpha^2 x^2 + C_\alpha^3 x^3 + \cdots + C_\alpha^n x^n + R_n(x)$$

返回

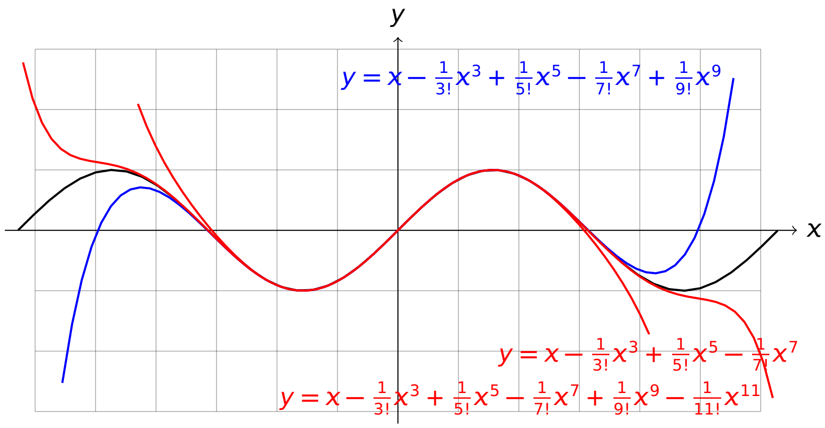
$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 + \cdots$$



$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 + \cdots$$



$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 + \cdots$$



例 **2.** 证明：当 $x > 0$ 时，有 $\ln(1+x) > x - \dfrac{x^2}{2}$.

解**.** 利用 $\ln(1+x)$ 的 1 阶麦克劳林公式.

例 **3.** 计算 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^2}+2\cos x-3}{x^4}$.

解**.** 泰勒公式求极限 由泰勒公式可得

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{1}{2!}x^4 + o\left(x^4\right),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o\left(x^5\right),$$

于是

$$e^{x^2} + 2\cos x - 3 = \left(\frac{1}{2!} + 2\cdot\frac{1}{4!}\right)x^4 + o\left(x^4\right),$$

所以

$$原式 = \lim_{x\to0}\frac{\frac{7}{12}x^4 + o\left(x^4\right)}{x^4} = \frac{7}{12}.$$

练习 **1.** 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{4+3x}+\sqrt{4-3x}-4}{x^2}$.

解**.** 利用 $\sqrt{1+x}$ 的 2 阶麦克劳林公式，求得极限等于 $-\dfrac{9}{32}$.