目录

复习 I

1.1 集合与函数

函数的两要素： 定义域与对应法则.

注记. 两个函数相同, 当且仅当两者的定义域和对应法则都相同.

求函数的定义域时有三个基本要求：

1. 根号里面要求大于等于零；
2. 对数里面要求大于零；
3. 分母要求不能等于零.

【函数的奇偶性】 给定函数 $y=f(x)$, 设其定义域 D 关于原点对称,

1. 若 $\forall x\in D$, 总有 $f(-x)=f(x)$, 则称 $f(x)$ 为偶函数.
2. 若 $\forall x\in D$, 总有 $f(-x)=-f(x)$, 则称 $f(x)$ 为奇函数.

【函数的周期性】 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D, 如果存在一个不为零的常数 l, 使得对任意的 $x\in D$, 有 $(x\pm l)\in D$, 且

$$f(x+l)=f(x)$$

恒成立, 则称 $f(x)$ 为周期函数； l 称为 $f(x)$ 的周期, 通常我们说周期函数的周期是指最小正周期.

【函数的单调性】 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D, 区间 $I\subset D$, x_1,x_2 为区间 I 上的任意两个数,

(1) 若当 $x_1 < x_2$ 时, 恒有 $f(x_1) < f(x_2)$, 则称 $f(x)$ 在区间 I 上单调增加或递增;

(2) 若当 $x_1 < x_2$ 时, 恒有 $f(x_1) > f(x_2)$, 则称 $f(x)$ 在区间 I 上单调减少或递减;

【函数的有界性】 设函数 $y = f(x)$ 在数集 I 上有定义, 如果存在一个正数 M, 对于所有 $x \in I$, 恒有 $|f(x)| \le M$, 则称函数 $f(x)$ 是在 I 上的有界函数. 若不存在这样的 M, 则称 $f(x)$ 是在 I 上的无界函数.

例 **1.** 将函数 $f(x) = \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+1}}$ 分解为简单函数的复合.

- 简单函数指的是由基本初等函数的四则运算得到的函数.
- 基本初等函数指的是幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数这五种.

1.2 极限与连续

【数列极限的定义】 设 $\{x_n\}$ 为一个数列，如果存在常数 A，对任何 $\epsilon > 0$，总存在正整数 $N > 0$，使得当 $n > N$ 时，总有

$$|x_n - A| < \epsilon$$

则称数列 $\{x_n\}$ 的极限等于 A，或者称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 A，记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A. \text{ 或 } x_n \to A\ (n \to \infty).$$

如果这样的常数 A 不存在，则称数列 $\{x_n\}$ 发散.

【数列极限的性质】

1. 极限的唯一性: 收敛数列的极限必唯一.
2. 有界性: 设 $\{x_n\}$ 收敛，则存在 $M > 0$ 使得 $|x_n| \le M$.
3. 保号性: 设数列收敛于 $A > 0$（或 $A < 0$），则存在 $N > 0$，使得当 $n > N$ 时有 $x_n > 0$（或 $x_n < 0$）.
4. 收敛数列与其子列件的关系: 如果数列 $\{x_n\}$ 收敛于 A ，那么它的任一子数列也收敛，且极限也是 A.

【函数极限的定义 ($x \to x_0$)】 设 $f(x)$ 在 x_0 的某个去心邻域内有定义，如果存在常数 A，对于任何 $\epsilon > 0$，总存在 $\delta > 0$，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，总有

$$|f(x) - A| < \epsilon$$

则称当 $x \to x_0$ 时 $f(x)$ 以 A 为极限，记为

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A. \text{ 或 } f(x) \to A \text{ (当 } x \to x_0)$$

【函数极限的定义 ($x \to \infty$)】 设 $f(x)$ 在 $|x|$ 足够大时有定义，如果存在常数 A，对任何 $\epsilon > 0$，总存在 $X > 0$，使得当 $|x| > X$ 时，总有 $|f(x) - A| < \epsilon$，则称当 $x \to \infty$ 时 $f(x)$ 以 A 为极限，记为

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A.$$

【左极限的定义】 设 $f(x)$ 在点 x_0 左邻域有定义，如果对任何 $\epsilon > 0$，总存在 $\delta > 0$，使得当 $x_0 - \delta < x < x_0$ 时有

$$|f(x) - A| < \epsilon,$$

则称当 $x \to x_0$ 时 $f(x)$ 以 A 为左极限，记为

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x_0^-) = A.$$

【右极限的定义】 设 $f(x)$ 在点 x_0 右邻域有定义，如果对任何 $\epsilon > 0$，总存在 $\delta > 0$，使得当 $x_0 < x < x_0 + \delta$ 时有

$$|f(x) - A| < \epsilon,$$

则称当 $x \to x_0$ 时 $f(x)$ 以 A 为右极限，记为

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x_0^+) = A.$$

例 **1.** 设

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 2 & x \le 0 \\ x^2 + 1 & 0 < x \le 1 \\ \frac{2}{x} & x > 1 \end{cases}$$

判断该函数在 $x \to 0$ 及 $x \to 1$ 时的极限是否存在.

定理. 极限存在当且仅当左右极限都存在而且相等.

[函数极限的性质]

1. 唯一性: 如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在, 则这个极限唯一.
2. 局部有界性: 如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，则存在 $\delta>0$ 和 $M>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时有 $|f(x)|\le M$.
3. 局部保号性: 如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，且 $A>0$（或 $A<0$），则存在 $\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时有 $f(x)>\dfrac{A}{2}>0$（或 $f(x)<\dfrac{A}{2}<0$）.
   - 保号性: 设 $f(x)\ge 0$（或 $f(x)\le 0$），且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，则 $A\ge 0$（或 $A\le 0$）.
   - 如果函数 $g(x)\ge h(x)$，而且 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=B$，则有 $A\ge B$.

[无穷小的定义] 如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ (或 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$)，就称 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$ (或 $x\to\infty$) 时的无穷小.

1. 无穷小是变量，不能与很小的数混淆.
2. 零是可以作为无穷小的唯一的数.

[无穷小与函数极限的关系] $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Longleftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$, 其中 $\alpha(x)$ 是当 $x\to x_0$ 时的无穷小.

1. 将一般极限问题转化为特殊极限问题 (无穷小);
2. 给出了函数 $f(x)$ 在 x_0 附近的近似表达式 $f(x)\approx A$, 误差为 $\alpha(x)$.

[无穷小的运算]

1. 两个 (有限个) 无穷小的和与差还是无穷小.
2. 无穷小和有界量的乘积还是无穷小.

   (a) 在自变量的同一变化过程中, 有极限的变量与无穷小的乘积是无穷小.

(b) 常数与无穷小的积是无穷小.

(c) 有限个无穷小的积是无穷小.

[注意]

1. 无穷多个无穷小的和不一定是无穷小;
2. 无穷多个无穷小的积不一定是无穷小;
3. 两个无穷小的商不一定是无穷小.

[无穷大] 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某个去心邻域有定义. 如果对任何给定的 $M>0$, 总存在 $\delta>0$, 使得只要 $0<|x-x_0|<\delta$, 就有 $|f(x)|>M$, 则称 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时为无穷大, 记为

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty.$$

1. 无穷大是变量, 不能与很大的数混淆;
2. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$ 是极限不存在的一种特殊情形.
3. 无穷大是一种特殊的无界变量, 但是无界变量未必是无穷大 (例: $\dfrac{1}{x}\sin(\dfrac{1}{x})$).

[无穷小与无穷大的关系] 无穷大的倒数为无穷小, 而非零无穷小的倒数为无穷大.

[无穷小阶的比较]

定义. 设 α、β 是同一变化过程中的两个无穷小.

1. 若 $\lim \frac{\beta}{\alpha}=0$, 则称 β 是比 α 高阶的无穷小, 记为 $\beta=o(\alpha)$.
2. 若 $\lim \frac{\beta}{\alpha}=\infty$, 则称 β 是比 α 低阶的无穷小.
3. 若 $\lim \frac{\beta}{\alpha}=c\neq 0$, 则称 β 和 α 是 同阶的无穷小.

★ 若 $\lim \frac{\beta}{\alpha}=1$, 则称 β 和 α 是 等价无穷小, 记为 $\beta\sim\alpha$.

4. 若 $\lim \frac{\beta}{\alpha^k}=C\neq 0$, $k>0$, 则 β 是 α 的 k 阶无穷小.

[常用的等价无穷小] 当 $x \to 0$ 时，有如下这些常用的等价无穷小：

(1) $\sin x \sim x$	(5) $\ln(1+x) \sim x$
(2) $\tan x \sim x$	(6) $e^x - 1 \sim x$
(3) $\arcsin x \sim x$	(7) $1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$
(4) $\arctan x \sim x$	(8) $\sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{x}{n}$

[四则运算法则] 如果 $\lim f(x) = A$，$\lim g(x) = B$，那么

1. $\lim(f(x) \pm g(x)) = \lim f(x) \pm \lim g(x) = A \pm B$
2. $\lim(f(x) \cdot g(x)) = \lim f(x) \cdot \lim g(x) = A \cdot B$
3. $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \dfrac{A}{B}$ （要求分母不为零）

[四则运算法则推论]

1. 如果 $\lim f(x)$ 存在, 而 c 为常数, 则

$$\lim[cf(x)] = c \lim f(x)$$

常数因子可以提到极限记号外面.

2. 如果 $\lim f(x)$ 存在, 而 n 是正整数, 则

$$\lim[f(x)]^n = [\lim f(x)]^n$$

[复合函数求极限]

1. 如果 $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = u_0, \lim\limits_{u \to u_0} f(u) = A$, 并且存在 $\delta_0 > 0$ 使得 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta_0)$ 时 $g(x) \neq u_0$, 则有

$$\lim_{x \to x_0} f[g(x)] = A.$$

2. 若 $\lim_{x\to x_0} g(x)=u_0$ 且 $\lim_{u\to u_0} f(u)=f(u_0)$，则

$$\lim_{x\to x_0} f[g(x)]=f\left[\lim_{x\to x_0} g(x)\right]=f(u_0).$$

例 **2.** 对于 $x\to x_0$ 的函数极限，如果 $f(x)$ 是初等函数，x_0 在 $f(x)$ 的定义区间中，则有

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$$

[极限存在准则 I]

定理 (极限存在准则 I)**.** 如果数列 $x_n\le y_n\le z_n$，而且 $\lim_{n\to\infty} x_n=A$，$\lim_{n\to\infty} z_n=A$，则有 $\lim_{n\to\infty} y_n=A$.

例子**.** 求 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\right)$

注记**.** 在上述定理中，如果不等式 $x_n\le y_n\le z_n$ 仅在 $n>N$ 时成立，结论不变.

定理 (极限存在准则 I′)**.** 如果 $f(x)\le g(x)\le h(x)$，且 $\lim_{x\to x_0} f(x)=A$，$\lim_{x\to x_0} h(x)=A$，则有 $\lim_{x\to x_0} g(x)=A$.

注记**.** 若将 $x\to x_0$ 全部改为 $x\to\infty$，定理仍成立.

注记**.** 在上述定理中，如果不等式 $f(x)\le g(x)\le h(x)$ 仅在 x_0 的某个去心邻域上成立，结论不变.

准则 I 和准则 I′ 称为夹逼准则或者两面夹准则

注意: 利用两面夹准则求极限关键是构造出 y_n $(f(x))$ 与 $z_n(h(x))$，并且 $y_n(f(x))$ 与 $z_n(h(x))$ 的极限是容易求的.

[极限存在准则 II]

定理 (极限存在准则 II)**.** 单调且有界的数列必定收敛.

1. 单调增加且有上界的数列必定收敛.
2. 单调减少且有下界的数列必定收敛.

注记**.** 若数列是某一项开始单调变化，结论仍然成立.

[重要极限 I]

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

一般地，如果当 $x\to 0$ 时，$\phi(x)\to 0$，则有

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin[\phi(x)]}{\phi(x)}=1$$

[重要极限 II]

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e \xRightarrow{u=1/x} \lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}}=e$$

一般地，如果当 $x\to\square$ 时，$\psi(x)\to 0$，则有

$$\lim_{x\to\square}\left(1+\psi(x)\right)^{\frac{1}{\psi(x)}}=e$$

[求极限的常用方法]

1. 多项式与分式函数代入法求极限;
2. 消去零因子法求极限;
3. 无穷小因子分出法求极限;

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}=\begin{cases}\frac{a_0}{b_0}, & n=m;\\ 0, & n<m;\\ \infty, & n>m.\end{cases}$$

4. 利用无穷小运算性质求极限;
5. 利用左右极限求分段函数极限;

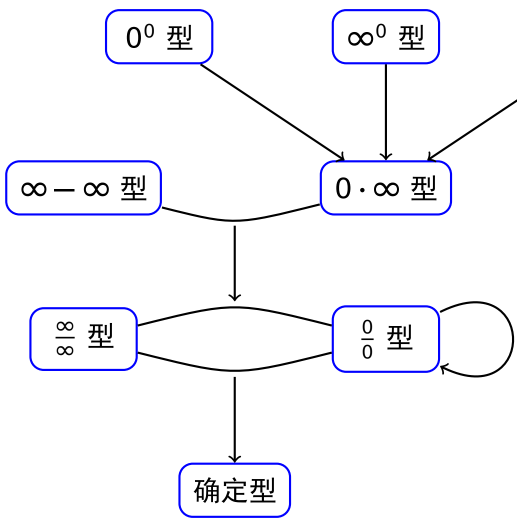
6. 等价无穷小代换：只能对乘除因子代换，不能对加减项代换．

7. 洛必达法则：在一定条件下，$\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

   - 如果能用等价无穷小代换，优先使用它；
   - 如果某个乘除因子的极限不为零，可以先求出该因子极限．

[幂指函数极限的求法]

$$\lim_{x\to\square}u^{v(x)}(x)=e^{\lim\limits_{x\to\square}v(x)\ln[u(x)]}$$



[连续的概念]

定义 **1.** 设 $y=f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内有定义，如果

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}\big(f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\big)=0,$$

则称 $f(x)$ 在点 x_0 连续.

定义 **2.** 设 $y=f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内有定义，如果

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0),$$

则称 $f(x)$ 在点 x_0 连续.

$\varepsilon-\delta$ 定义：$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$, 使当 $|x-x_0|<\delta$ 恒有

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

从定义我们可以看出，函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续，必须满足以下三个条件:

1. 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有定义
2. 极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在, 即
$$f(x_0^-)=f(x_0^+)$$
3. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

$\boxed{\text{函数在某点连续} \Longleftrightarrow \text{函数在该点的极限存在且等于该点的函数值.}}$

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$（极限存在）:

$$\forall\epsilon>0,\ \exists\delta>0,\ x\in\mathring{U}(x_0,\delta)\Longrightarrow f(x)\in U(A,\epsilon)$$

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$（连续）:

$$\forall\epsilon>0,\ \exists\delta>0,\ x\in U(x_0,\delta)\Longrightarrow f(x)\in U(f(x_0),\epsilon)$$

[单侧连续]

定义. 若函数 $f(x)$ 在 $(a,x_0]$ 内有定义, 且 $f(x_0^-)=f(x_0)$, 则称 $f(x)$ 在点 x_0 处左连续.

若函数 $f(x)$ 在 $[x_0,b)$ 内有定义, 且 $f\left(x_0^+\right)=f(x_0)$ 则称 $f(x)$ 在点 x_0 处右连续.

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0) \Longleftrightarrow f\left(x_0^-\right)=f\left(x_0^+\right)=f(x_0)$$

[连续函数]

定义. 如果 $f(x)$ 在区间 I 的每一点都连续，则称 $f(x)$ 在区间 I 上连续，或称 $f(x)$ 是区间 I 上的连续函数.

函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 则:

- 函数在开区间 (a,b) 内连续;
- 在左端点 $x=a$ 处右连续;
- 在右端点 $x=b$ 处左连续.

注记. 连续函数的图形是一条连续而不间断的曲线.

[函数的间断点]

定义. 设 $f(x)$ 在点 x_0 的某个去心邻域有定义，如果 $f(x)$ 在点 x_0 不连续，则称它在点 x_0 间断，或者称点 x_0 是 $f(x)$ 的间断点.

x_0 为 $f(x)$ 的间断点, 有以下三种情形:

1. $f(x)$ 在点 x_0 处没有定义;
2. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在;
3. $f(x)$ 在点 x_0 处有定义, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在, 但
$$\lim_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0).$$

定义 3. 如果 $f(x)$ 在点 x_0 处的极限存在，但 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A\neq f(x_0)$, 或 $f(x)$ 在点 x_0 处无定义则称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的可去间断点.

可去间断点只要改变或者补充可去间断处函数的定义, 即可使其变为连续点.

定义. 如果 $f(x)$ 在点 x_0 处左, 右极限都存在, 但 $f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$, 则称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的跳跃间断点.

跳跃间断点与可去间断点统称为第一类间断点.

第一类间断点的特点：函数在该点左、右极限都存在.

1. 左右极限相等，则为可去间断点;
2. 左右极限不相等，则为跳跃间断点.

定义. 如果 $f(x)$ 在点 x_0 处的左、右极限至少有一个不存在, 则称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的第二类间断点.

例子. $f(x)=\frac{1}{x}$ 在 $x=0$ 处..无穷间断点

例子. $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ 在 $x=0$ 处..振荡间断点

注记. 间断点常见位置：（*1*）分母为零；（*2*）分段点.

[连续函数的运算]

定理 1. 若函数 $f(x),g(x)$ 在点 x_0 处连续则 $f(x)\pm g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}\,(g(x_0)\neq 0)$ 在点 x_0 处也连续.

定理 2. 严格单调递增（递减）的连续函数必有严格单调递增（递减）的连续反函数.

定理 3. 设函数 $u=\varphi(x)$ 在点 $x=x_0$ 连续, 且 $\varphi(x_0)=u_0$, 而函数 $y=f(u)$ 在点 $u=u_0$ 连续, 则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在点 $x=x_0$ 也连续.

定理 4. 初等函数在其定义区间内都是连续函数.

1. 定义区间是指包含在定义域内的区间.
2. 初等函数仅在其定义区间内连续, 在其定义域内不一定连续;

$y=\sqrt{\cos x-1}$, $\quad D: x=0,\pm 2\pi,\pm 4\pi,\cdots$ 这些孤立点的去心邻域内没有定义, 故不连续.

[闭区间上连续函数的性质]

定义. 对于在区间 I 上有定义的函数 $f(x)$, 如果有 $x_0 \in I$, 使得对于任一 $x \in I$ 都有

$$f(x) \le f(x_0) \quad (f(x) \ge f(x_0))$$

则称 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 在区间 I 上的最大 (小) 值.

定理 5 (最值定理)**.** 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在该区间上有界而且一定能取到最大值 M 和最小值 m.

1. 若区间是开区间, 定理不一定成立;
2. 若区间内有间断点, 定理不一定成立.

定义. 如果 x_0 使 $f(x_0)=0$, 则 x_0 称为函数 $f(x)$ 的零点.

定理 6 (零点定理)**.** 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)$ 和 $f(b)$ 异号，则在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=0$.

定理 7 (介值定理)**.** 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)=A$ 和 $f(b)=B$ 不相等，则对于 A 与 B 之间的任何数 C，在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=C$.

推论. 在闭区间上连续的函数必取得介于最大值 M 与最小值 m 之间的任何值.

1.3 导数与微分

[导数的定义]

定义. 设 $y=f(x)$ 在 x_0 的某邻域有定义．若极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在，则称此极限为 $f(x)$ 在 x_0 处的导数（或微商）．记为 $f'(x_0)$，$y'|_{x=x_0}$，$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}$，或 $\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0}$.

如果 $f(x)$ 在区间 I 内可导，则每个 $x_0 \in I$ 都有一个导数值 $f'(x_0)$ 与之对应，从而得到一个函数 $f'(x)$：

$$f' : x_0 \longmapsto f'(x_0)$$

$f'(x)$ 称为 $f(x)$ 在 I 内的导函数（简称导数），记为 $f'(x)$，或 y'，或 $\dfrac{dy}{dx}$，或 $\dfrac{df(x)}{dx}$. 此时有

$$f'(x_0)=f'(x)|_{x=x_0}.$$

[单侧导数]

定义. 设 $f(x)$ 在 $(x_0-\delta,x_0]$ 上有定义，若左极限

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

存在，则称它为 $f(x)$ 在 x_0 处的左导数，记为 $f'_-(x_0)$.

定义. 设 $f(x)$ 在 $[x_0,x_0+\delta)$ 上有定义，若右极限

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

存在，则称它为 $f(x)$ 在 x_0 处的右导数，记为 $f'_+(x_0)$.

注记. 导数存在 $\Longleftrightarrow$ 左导数和右导数都存在且相等.

[可导与连续的关系]

定理. $f(x)$ 在 x_0 点可导, 则 $f(x)$ 在 x_0 点连续.

注意：$f(x)$ 在 x_0 点连续 $\not\Longrightarrow$ $f(x)$ 在 x_0 点可导.

[导数的四则运算]

定理 1. 如果函数 $u(x),v(x)$ 在点 x 处可导, 则它们的和、差、积、商 (除分母不为零外) 在点 x 处也可导，并且

1. $[u(x)\pm v(x)]'=u'(x)\pm v'(x)$.
2. $[u(x)\cdot v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$.
3. $\left[\dfrac{u(x)}{v(x)}\right]'=\dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}$, $(v(x)\neq 0)$.

[反函数的求导法则]

定理 **2.** 如果函数 $x=\varphi(y)$ 在某区间 I_y 内单调、可导且 $\varphi'(y)\neq 0$, 则它的反函数 $y=f(x)$ 在对应区间 I_x 内也可导，且有

$$f'(x)=\frac{1}{\varphi'(y)}.$$

注记**.** 上式也可以写成 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}}$.

推论**.** 设 $y=f(u)$，$u=g(v)$，$v=h(x)$．则复合函数 $y=f(g(h(x)))$ 的导数公式为：

$$y'_x=y'_u\cdot u'_v\cdot v'_x$$

或者

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}.$$

[复合函数的求导法则]

定理 **3.** 设 $y=f(u)$，$u=g(x)$，则它们的复合函数 $y=f[g(x)]$ 的导数公式为：

$$y'_x=y'_u\cdot u'_x$$

或者

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}.$$

或者

$$[f(g(x))]'=f'(g(x))\cdot g'(x)$$

[隐函数求导]

- 显函数：由 $y=f(x)$ 直接确定的函数关系.
- 隐函数：由 $F(x,y)=0$ 所确定的函数 $y=y(x)$ 称为隐函数.

$$F(x,y)=0\Longrightarrow y=f(x)\qquad \text{隐函数的显化}$$

问题**.** 隐函数不易显化或不能显化如何求导?

答案. 利用复合函数求导法则，将 y 看成 x 的函数，方程两边同时对 x 求导.

例 **1.** 对下面的方程求导数 y'_x：

$$x^2+y^2=xy+1$$

对于隐函数求导，要注意

- $(\phi(x))'_x=\phi'(x)$；
- $(\phi(y))'_x=\phi'(y)y'_x$.

[对数求导法]

对于多个函数相乘除或者幂指数函数 $(u(x))^{v(x)}$ 的情形，可以先在方程两边取对数，然后利用隐函数的求导方法求出导数.

例 **2.** 设 $y=x^{\sin x}(x>0)$，求 y'.

[参数方程求导] 已知参数方程 $\begin{cases} x=\phi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$，求 y 关于 x 的一阶和二阶导数.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{\psi'(t)}{\phi'(t)},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})}{\mathrm{d}t}\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\left[\frac{\psi'(t)}{\phi'(t)}\right]'\Big/\phi'(t).$$

[常数和基本初等函数的导数公式]

$$
\begin{array}{ll}
(C)' = 0 & (x^\mu)' = \mu x^{\mu-1} \\
(\sin x)' = \cos x & (\cos x)' = -\sin x \\
(\tan x)' = \sec^2 x & (\cot x)' = -\csc^2 x \\
(\sec x)' = \sec x \tan x & (\csc x)' = -\csc x \cot x \\
(a^x)' = a^x \ln a & (e^x)' = e^x \\
\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x \ln a} & (\ln x)' = \dfrac{1}{x} \\
(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} & (\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2} & (\operatorname{arccot} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}
\end{array}
$$

【高阶导数的定义】类似地，我们可以定义：

- 二阶导数的导数称为三阶导数, $f'''(x), y''', \frac{d^3y}{dx^3}$.
- 三阶导数的导数称为四阶导数, $f^{(4)}(x), y^{(4)}, \frac{d^4y}{dx^4}$.
- 一般地, 函数 $f(x)$ 的 $n-1$ 阶导数的导数称为函数 $f(x)$ 的 n 阶导数, 记作

$$f^{(n)}(x), y^{(n)}, \frac{d^ny}{dx^n} \text{ 或 } \frac{d^nf(x)}{dx^n}$$

二阶和二阶以上的导数统称为高阶导数. 相应地, $f(x)$ 称为零阶导数 ; $f'(x)$ 称为一阶导数.

【高阶导数的求法】高阶导数的求法主要有

1. 直接法：由高阶导数的定义逐步求高阶导数.
2. 间接法：利用已知的高阶导数公式, 通过四则运算, 变量代换等方法, 求出 n 阶导数.

【高阶导数的运算法则】设函数 u 和 v 具有 n 阶导数，则

1. $(u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}$;

2. $(Cu)^{(n)} = Cu^{(n)}$

3. $$\begin{aligned}(u\cdot v)^{(n)} &= u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v'' \\ &+ \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)} \\ &+ \cdots + uv^{(n)} \\ &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)}\end{aligned}$$ 莱布尼茨公式

[函数的微分]

定义 **1.** 对于自变量在点 x_0 处的改变量 Δx，如果函数 $y=f(x)$ 的相应改变量 Δy 可以表示为

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x) \qquad (\Delta x \to 0)$$

其中 A 与 Δx 无关，则称 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可微，并称 $A\Delta x$ 为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处 *(*相应于自变量增量 Δx*)* 的微分，记为

$$\mathrm{d}y|_{x=x_0} \text{ 或 } \mathrm{d}f(x_0),$$

即

$$\mathrm{d}y|_{x=x_0} = A\Delta x.$$

注记**.** 微分 $\mathrm{d}y$ 叫做函数增量 Δy 的线性主部.

由定义知：

1. $\mathrm{d}y$ 是自变量的改变量 Δx 的线性函数;

2. $\Delta y - \mathrm{d}y = o(\Delta x)$ 是 Δx 的高阶无穷小;

3. 当 $A \neq 0$ 时, 有
$$\frac{\Delta y}{\mathrm{d}y} = 1 + \frac{o(\Delta x)}{A\cdot\Delta x} \to 1 \quad (\Delta x \to 0),$$
即 $\mathrm{d}y$ 与 Δy 是等价无穷小;

4. A 是与 Δx 无关的常数, 但与 $f(x)$ 和 x_0 有关;

5. 当 $|\Delta x|$ 很小时, $\Delta y \approx \mathrm{d}y$ (线性主部).

定理. $y=f(x)$ 在点 x_0 处可微 $\Longleftrightarrow$ $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，且 $A=f'(x_0)$.

函数 $y=f(x)$ 在任意点 x 的微分,称为函数的微分,记作 $\mathrm{d}y$ 或 $\mathrm{d}f(x)$, 即 $\mathrm{d}y=f'(x)\,\mathrm{d}x$.

[微分运算法则]

1. 函数和、差、积、商的微分法则

$$\mathrm{d}(u\pm v)=\mathrm{d}u\pm\mathrm{d}v \qquad \mathrm{d}(Cu)=C\mathrm{d}u$$

$$\mathrm{d}(uv)=v\mathrm{d}u+u\mathrm{d}v \qquad \mathrm{d}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\mathrm{d}u-u\mathrm{d}v}{v^2}$$

2. 复合函数的微分法则

1. 若 $y=f(u)$，则有 $\mathrm{d}y=f'(u)\,\mathrm{d}u$；
2. 若 $y=f(u), u=g(x)$，则仍有 $\mathrm{d}y=f'(u)\,\mathrm{d}u$.

无论 u 是自变量还是中间变量，函数 $y=f(u)$ 的微分形式总是 $\mathrm{d}y=f'(u)\,\mathrm{d}u$, 称为一阶微分的形式不变性.

[边际与弹性]

定义 **2.** 设函数 $y=f(x)$ 在 x 处可导，则称导数 $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的边际函数. $f'(x)$ 在 x_0 处的值 $f'(x_0)$ 为边际函数值.

当 $x=x_0$ 时，x 改变一个单位，y 改变 $f'(x_0)$ 个单位.

定义 (弹性函数的定义)**.** 一般地，若函数 $y=f(x)$ 在区间内 (a,b) 可导，且 $f(x)\neq 0$, 则称

$$\frac{Ey}{Ex}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y/y}{\Delta x/x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\frac{x}{y}=y'\cdot\frac{x}{y}$$

为函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内的点弹性函数，简称弹性函数.

注意：弹性的意义，尤其是价格的需求函数的意义.

1.4 导数的应用

[微分中值定理]

定理 (罗尔定理). 如果函数 $f(x)$ 满足下列条件：

(1) 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,

(2) 在开区间 (a,b) 内可导,

(3) $f(a)=f(b)$,

则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f'(\xi)=0$.

定理 (拉格朗日中值定理). 如果函数 $f(x)$ 满足下列条件：

(1) 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,

(2) 在开区间 (a,b) 内可导,

则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

定理 (柯西中值定理). 如果函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 满足下列条件：

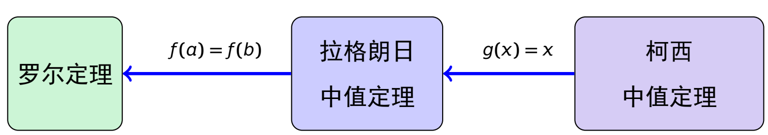
(1) 在闭区间 $[a,b]$ 上都连续,

(2) 在开区间 (a,b) 内都可导,

(3) 在开区间 (a,b) 内 $g'(x)\neq 0$,

则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使 $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

罗尔定理、拉格朗日中值定理及柯西中值定理之间的关系:



例 **1.** 已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(0)=0, f(1)=1$, 证明:

(1) 存在 $\xi \in (0,1)$, 使得 $f(\xi)=1-\xi$.

(2) 存在两个不同的点 $\theta,\eta \in (0,1)$, 使得 $f'(\theta)f'(\eta)=1$.

思路路解析:

(1) 第一问用零点定理 ($F(x)=f(x)-(1-x)$).

(2) 第二问利用第一问结论与拉格朗日中值定理.

$$f(\xi)-f(0)=f'(\theta)\xi,\ f(1)-f(\xi)=f'(\eta)(1-\xi)$$

两式相乘，并用第一问结论即可证明.

[函数的单调性]

定理 **1.** 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 上可导，那么

1. 如果在 (a,b) 上恒有 $f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加.
2. 如果在 (a,b) 上恒有 $f'(x)<0$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调减少.

若 $f'(x)\geq 0$ (≤ 0) 在 (a,b) 上成立，且等号仅在仅在个别点成立，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加 (减少)

定义**.** 若函数在其定义域的某个区间内是单调的，则该区间称为函数的单调区间.

单调区间的求法:

利用导数等于零的点和不可导点，划分出区间，然后判断各区间内导数的符号.

[函数的极值]

定义 **1.** 设 $f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域有定义.

1. 若对 x_0 某个去心邻域的任何 x，总有 $f(x)<f(x_0)$，则称 x_0 为 $f(x)$ 的一个极大值点，$f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的一个极大值.

2. 若对 x_0 某个去心邻域的任何 x，总有 $f(x) > f(x_0)$，则称 x_0 为 $f(x)$ 的一个极小值点，$f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的一个极小值.

极大值点和极小值点统称为极值点，极大值和极小值统称为极值.

定理 **2** (极值的必要条件)**.** 设 $f(x)$ 在 x_0 点可导，而且在 x_0 处取得极值，则 $f'(x_0) = 0$.

注记**.** 我们称导数为零的点为驻点.

- 驻点未必都是极值点：比如 $y = x^3$.
- 极值点未必都是驻点：比如 $y = |x|$.
- 可导函数的极值点一定是驻点.
- 极大值不一定比极小值大.

定理 **3** (极值的第一充分条件)**.** 设 $f(x)$ 在 x_0 点连续, 而且在它的某个去心邻域内可导.

1. 若在 x_0 的左邻域内 $f'(x) > 0$，在右邻域内 $f'(x) < 0$，则 x_0 为极大值点.
2. 若在 x_0 的左邻域内 $f'(x) < 0$，在右邻域内 $f'(x) > 0$，则 x_0 为极小值点.
3. 若在 x_0 的左邻域内和右邻域内 $f'(x)$ 的符号不变，则 x_0 不是极值点.

定理 **4.** 判别极值的第二充分条件 设 $f'(x_0) = 0$ 而且 $f''(x_0)$ 存在.

1. 若 $f''(x_0) > 0$，则 x_0 为 $f(x)$ 的极小值点.
2. 若 $f''(x_0) < 0$，则 x_0 为 $f(x)$ 的极大值点.

注记 **1.** 当 $f''(x_0) = 0$ 时，上面的定理无法判定. 例如 $f(x) = x^3$ 和 $f(x) = x^4$.

求函数极值的一般步骤：

1. 求导数 $f'(x)$;
2. 找出驻点（即方程 $f'(x) = 0$ 的根）和不可导点;

3. 判断:

- 驻点 $\left\langle \begin{array}{ll} f''(x_0) \neq 0 & \text{第一或第二充分条件} \\ f''(x_0) = 0 & \text{第一充分条件} \end{array} \right.$
- 不可导点：第一充分条件;

4. 结论.

注意格式: 极大 (小) 值为 $f(x_0) = a$ 或极大 (小) 值点为 $x = x_0$.

[函数的凹凸性]

定义. 设 $f(x)$ 在区间 I 上连续, 如果对 I 上任意两点 x_1, x_2, 恒有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]$$

那么称 $f(x)$ 在 I 上的图形是凹的 (或凹弧) ; 如果恒有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > \frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]$$

那么称 $f(x)$ 在 I 上的图形是凸的 (或凸弧).

定理 5. 假设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上有二阶导数，那么

1. 如果 $x \in (a,b)$ 时，恒有 $f''(x) > 0$，则函数的曲线在 (a,b) 上是凹的.
2. 如果 $x \in (a,b)$ 时，恒有 $f''(x) < 0$，则函数的曲线在 (a,b) 上是凸的.

[函数的拐点]

定义. 曲线凹和凸的分界点 (x_0, y_0) 称为拐点.

性质. 在拐点 (x_0, y_0) 处，要么 $f''(x_0) = 0$，要么 $f''(x_0)$ 不存在.

性质. 拐点处的切线必在拐点处穿过曲线.

....

例 2. 求曲线 $y = \sqrt[3]{x}$ 的凹凸区间和拐点.

注记 **2.** (x_0,y_0) 为拐点 $\not\Rightarrow$ $f''(x_0)=0$. *(二阶导数不存在)*

例 **3.** 求曲线 $y=x^4$ 的凹凸区间和拐点.

注记 **3.** $f''(x_0)=0$ $\not\Rightarrow$ (x_0,y_0) 为拐点. *(二阶导数除在 $x=0$ 处均大于零)*

$f(x)$ 在 x_0 的邻域内二阶可导，且 $f''(x_0)=0$，

1. 若 x_0 两边 $f''(x)$ 变号，则 $(x_0,f(x_0))$ 为拐点.
2. 若 $f'''(x_0)\neq 0$, 则 $(x_0,f(x_0))$ 为拐点.

[函数的渐近线]

定义. *1.* 若 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=b$，称 $y=b$ 为其水平渐近线.

2. 若 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$，称 $x=a$ 为其铅直渐近线.

注记. (1) $x\to\infty$ 可以改为 $x\to+\infty$ 或 $x\to-\infty$.

(2) $x\to a$ 可以改为 $x\to a^+$ 或 $x\to a^-$.

定义 2 (斜渐近线)**.** 若直线 $y=kx+b$（$k\neq 0$）满足

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-(kx+b)]=0,$$

则称它是曲线 $y=f(x)$ 的一条斜渐近线.

定理 6. 直线 $y=kx+b$ 是曲线 $y=f(x)$ 的斜渐近线，当且仅当

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=k \quad 而且 \quad \lim_{x\to\infty}[f(x)-kx]=b.$$

注记. $x\to\infty$ 可以改为 $x\to+\infty$ 或 $x\to-\infty$.

[函数的最值] 一般地，对于函数在闭区间 $[a,b]$ 上的最值，我们只需考虑下述这些可疑点：

- 导数为零的点；
- 导数不存在的点；
- 区间的端点.

特殊地，若函数在区间（开或闭，有限或无限）上可导，且在区间内只有一个驻点，则有

- 如果该驻点为极大值，则它也是最大值；
- 如果该驻点为极小值，则它也是最小值.

1.5 不定积分

$$\int 1\,\mathrm{d}x = x + C \tag{1.5.1}$$

$$\int x^{a}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + C \tag{1.5.2}$$

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C \tag{1.5.3}$$

$$\int a^{x}\,\mathrm{d}x = \frac{a^{x}}{\ln a} + C \tag{1.5.4}$$

$$\int e^{x}\,\mathrm{d}x = e^{x} + C \tag{1.5.5}$$

$$\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C \tag{1.5.6}$$

$$\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C \tag{1.5.7}$$

$$\int \tan x\,\mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + C \tag{1.5.8}$$

$$\int \cot x\,\mathrm{d}x = \ln|\sin x| + C \tag{1.5.9}$$

$$\int \sec x \, dx = \ln|\sec x + \tan x| + C \tag{1.5.10}$$

$$\int \csc x \, dx = \ln|\csc x - \cot x| + C \tag{1.5.11}$$

$$\int \sec^2 x \, dx = \tan x + C \tag{1.5.12}$$

$$\int \csc^2 x \, dx = -\cot x + C \tag{1.5.13}$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C \tag{1.5.14}$$

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a + x}{a - x} \right| + C \tag{1.5.15}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C \tag{1.5.16}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C \tag{1.5.17}$$

$$\begin{aligned} \int f(\phi(x))\phi'(x) \, dx &= \int f(\phi(x)) \, d(\phi(x)) \\ &= \left[\int f(u) \, du \right]_{u=\phi(x)} \end{aligned}$$

一般地，如果 $\int f(x)dx = F(x) + C$，则有

$$\int f(ax + b) \, dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C.$$

这个公式利用换元 $u = ax + b$ 可以得到.

例 **1.** 求不定积分 $\int \frac{dx}{(4x+5)^2}$.

例 **2.** 求不定积分 $\int \sin^2 x \cos x \, \mathrm{d}x$.

$$\begin{aligned}\int f(x)\,\mathrm{d}x &= \int f(\psi(t))\,\mathrm{d}(\psi(t)) \\ &= \left[\int f(\psi(t))\psi'(t)\,\mathrm{d}t\right]_{t=\psi^{-1}(x)}\end{aligned}$$

例 **3.** 求不定积分 $\int \frac{1}{\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x$.

例 **4.** 求不定积分 $\int \frac{x}{\sqrt{x-3}}\,\mathrm{d}x$.

1. $\int f(\sqrt{a^2-x^2})\,\mathrm{d}x$，令 $x=a\sin t$
2. $\int f(\sqrt{x^2+a^2})\,\mathrm{d}x$，令 $x=a\tan t$
3. $\int f(\sqrt{x^2-a^2})\,\mathrm{d}x$，令 $x=a\sec t$

分部积分公式：$\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u$

例 **5.** 求下列不定积分

1. 求不定积分 $\int x\cos x\,\mathrm{d}x$.

2. 求不定积分 $\int x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

3. 求不定积分 $\int x\ln x\,\mathrm{d}x$.

4. 求不定积分 $\int x\arctan x\,\mathrm{d}x$.

5. 求不定积分 $\int \mathrm{e}^x\sin x\,\mathrm{d}x$.