第二章　行列式　克拉默法则

1. 下列 $n(n>2)$ 阶行列式的值可能不是零的有（ C ）.

   (A) 行列式中的非零元素少于 n 个

   (B) 行列式中的每行元素之和均为零

   (C) 行列式主对角线上元素均为零

   (D) 行列式中有一行元素的余子式均为零

2. 四阶行列式中含负号并且包含元素 a_{23}, a_{31} 的项为（ B ）.

   (A) $a_{12}a_{23}a_{31}a_{44}$　**(B)** $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$　**(C)** $a_{14}a_{23}a_{31}a_{44}$　**(D)** $a_{12}a_{23}a_{31}a_{42}$

3. 设行列式 $\left|a_{ij}\right| = m(i,j=1,2,\cdots,5)$, 将 $\left|a_{ij}\right|$ 的第二列元素乘以 **2** 后与第三列交换，再转置, 则结果为（ A ）.

   (A) $-2m$　**(B)** $-32m$　**(C)** $32m$　**(D)** $2m$

4. 设 A 为 3×3 矩阵, 且 $|A|=-2$, 把 A 按列分块为 $A=(A_1,A_2,A_3)$, 其中 $A_j(j=1,2,3)$ 为 A 的第 j 列, 则行列式 $|A_3-2A_1,3A_2,A_1|=$（ C ）.

   (A) -6　**(B)** -12　**(C)** 6　**(D)** 12

5. 设矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$, 其中 $\alpha_i(i=1,2,3)$ 是三维列向量，若行列式 $|A|=1$, 则行列式 $|(4\alpha_1,2\alpha_1-3\alpha_2,\alpha_3)|=$（ B ）.

   (A) -24　**(B)** -12　**(C)** **12**　**(D)** **24**

6. 已知三阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=1$, 则 $\begin{vmatrix} a_{11} & 3a_{11}-2a_{12} & 4a_{13}-a_{11} \\ -3a_{21} & -9a_{21}+6a_{22} & -12a_{23}+a_{21} \\ a_{31} & 3a_{31}-2a_{32} & 4a_{33}-a_{31} \end{vmatrix}=$（ B ）

   (A) 12　**(B)** 24　**(C)** -24　**(D)** -36

7. 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix}$ 中元素 a_{23} 的代数余子式 $A_{23}=$ $\underline{\quad -5 \quad}$.

8. 计算行列式的值: $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \underline{\quad -7 \quad}$.

9. $\begin{vmatrix} 7 & 8 & 9 & x \\ 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 3 & 5 \end{vmatrix}$ 中 x 的系数为$\underline{\quad -6 \quad}$.

10. 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 7 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \end{vmatrix} = \underline{\quad 50 \quad}$.

11. 已知行列式 $D = \begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & x & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$, 则 D 中 x 的系数是$\underline{\quad -2 \quad}$.

12. 行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$, 则 $A_{12} + A_{33} = \underline{\quad 3 \quad}$.

13. 行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -4 & 9 & -3 \\ 5 & -15 & 5 \end{vmatrix}$, 则 $M_{31} - M_{32} - M_{33} = \underline{\quad 28 \quad}$.

14. 行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & -5 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ 其中 A_{ij} 是 D 的 (i, j) 元的代数余子式, 求 $A_{31} + 3A_{32} - 2A_{33} + 2A_{34}$

解. 由代数余子式与行列式的关系可得:

$$A_{31} + 3A_{32} - 2A_{33} + 2A_{34} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 3 & 6 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -16.$$

参考答案：-16.

15. 求行列式 $D=\begin{vmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ b & b & a & \dots & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & b & b & \dots & a \end{vmatrix}$ 的值.

解. 由条件得：

$$D=\begin{vmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ b & b & a & \dots & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & b & b & \dots & a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & b & \dots & b \\ a+(n-1)b & a & b & \dots & b \\ a+(n-1)b & b & a & \dots & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a+(n-1)b & b & b & \dots & a \end{vmatrix}$$

$$=[a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & b & b & \dots & b \\ 1 & a & b & \dots & b \\ 1 & b & a & \dots & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & b & b & \dots & a \end{vmatrix}$$

$$=[a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & b & b & \dots & b \\ 0 & a-b & b & \dots & b \\ 0 & 0 & a-b & \dots & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a-b \end{vmatrix}$$

$$=[a+(n-1)b](a-b)^{n-1}$$

参考答案：$[a+(n-1)b](a-b)^{n-1}$.

16. 用克莱姆法则求线性方程组 $\begin{cases} 2x-5y+4z=4 \\ x+y-2z=-3 \\ 5x-2y+7z=22 \end{cases}$ 中 y 的值.

解. $D=\begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -2 & 7 \end{vmatrix}=63$，$D_2=\begin{vmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 1 & -3 & -2 \\ 5 & 22 & 7 \end{vmatrix}=126$. 故 $y=2$.

参考答案：$y=2$.

17. 求行列式 $D=\begin{vmatrix}2&1&8&1\\1&-3&9&-6\\0&2&-5&2\\1&4&0&6\end{vmatrix}$ 的值.

解. $D=-27$.

参考答案： $D=-27$.

18. 求行列式 $D=\begin{vmatrix}3&2&2&2\\2&3&2&2\\2&2&3&2\\2&2&2&3\end{vmatrix}$ 的值.

解. 由行列式的性质可得

$$D=\begin{vmatrix}3&2&2&2\\2&3&2&2\\2&2&3&2\\2&2&2&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}9&9&9&9\\2&3&2&2\\2&2&3&2\\2&2&2&3\end{vmatrix}=9\begin{vmatrix}1&1&1&1\\2&3&2&2\\2&2&3&2\\2&2&2&3\end{vmatrix}=9\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{vmatrix}=9$$

参考答案： $D=9$.

19. 求行列式 $D=\begin{vmatrix}1&2&0&1\\2&0&-1&1\\-1&2&3&0\\1&1&-1&2\end{vmatrix}$ 的值.

解. $D=10$.

参考答案： $D=10$.

第三章　矩阵的运算

1. 设 A, B 为同阶方阵，且 $|A|=|B|$, 则必有 (**D**).

   (A) $A=B$　**(B)** $A^*=B^*$　**(C)** $A+A^*=B+B^*$　**(D)** $AA^*=BB^*$

2. 设 A, B, C 为同阶方阵，且 $ABC=E$, 则 $B^{-1}=$ (**B**).

   (A) AC　**(B)** CA　**(C)** $(AC)^{-1}$　**(D)** $(CA)^{-1}$

3. 设 A 为 n 阶矩阵，则在下列矩阵中, 为反对称矩阵的是 (**D**).

   (A) AA^T　**(B)** A^TA　**(C)** $A+A^T$　**(D)** $A-A^T$

4. 矩阵A、B可以做减法运算的必要条件是 (**D**).

   (A) 矩阵 A、 B 有相同的行数　**(B)** 矩阵 A、 B 有相同的列数
   (C) 矩阵 A、 B 元素的个数相同　**(D)** 拒阵 A、 B 为同型矩阵

5. 设 A 为可逆矩阵, 则 A^* 的逆矩阵为 (**A**).

   (A) $|A|^{-1}A$　**(B)** $|A|A$　**(C)** $|A|^{-1}A^{-1}$　**(D)** $|A|A^{-1}$

6. 设 A、 B 为 n 阶方阵, 且 $AB=0,\ B\neq 0$, 则必有 (**B**)

   (A) $A=0$　**(B)** $|A|=0$
   (C) $|B|\neq 0$　**(D)** $(A+B)^2=A^2+B^2$

7. 设方阵 A 可逆, 且 $AB=BA$, 则下列等式未必成立的是 (**B**).

   (A) $A^2B=BA^2$　**(B)** $A^TB=BA^T$　**(C)** $A^{-1}B=BA^{-1}$　**(D)** $A^*B=BA^*$

8. 设 A 为 n 阶非零矩阵， E 为 n 阶单位矩阵，若 $A^3=0$, 则 (**C**).

   (A) $E-A$ 不可逆， $E+A$ 不可逆　**(B)** $E-A$ 不可逆， $E+A$ 可逆
   (C) $E-A$ 可逆， $E+A$ 可逆　**(D)** $E-A$ 可逆, $E+A$ 不可逆

9. 设 A、B 均为 n 阶矩阵，若 $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$ 成立，则 A、B 必须满足（ **D** ）.

(A) $A=E$ 或 $B=E$ (B) $A=O$ 或 $B=O$ (C) $A=B$ (D) $AB=BA$

10. 下列矩阵不是初等矩阵的是（ **B** ）.

(A) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

11. 设 A 为 3 阶方阵，A^* 为 A 的伴随矩阵，且 $|A|=\frac{1}{2}$，则行列式 $\left|3A^*-(2A)^{-1}\right|$ 的值是___2___.

12. 已知 $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$， $B=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$，则 $AB^T=$ ___$\begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 10 & 10 \end{pmatrix}$___.

13. 已知 $A=\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$，则 $A^{-1}=$ ___$\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{1}{10} & \frac{3}{10} \end{pmatrix}$___.

14. 已知 $A^2-2A-8E=0$，则 $(A+E)^{-1}=$ ___$\frac{1}{5}(A-3E)$___.

15. 设向量 $\alpha=(2,-1)$，则 $\left(\alpha^T\alpha\right)^{101}=$ ___$5^{100}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$___.

16. 设 4 维向量 $\alpha=(3,-1,0,2)$， $\beta=(3,1,-1,4)$，若向量 γ 满足 $2\alpha+\gamma=3\beta$，则 $\gamma=$ ___$(3,5,-3,8)$___.

17. 设 A, B 均为3阶方阵，且 $|A|=4, |B|=2$，则 $\left|2\left(B^TA^{-1}\right)\right|=$ ___4___.

18. 设 $A=(3,0,1,0)$, $B=\begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 4 \\ 11 \end{pmatrix}$，则 $(AB)^{2017}=$ ___1___.

19. 设 $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$，则 $(A^*)^{-1}=$ ___$\frac{1}{2}A$___.

20. 设 $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} a & b & c-2b \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, 且 $AP=B$, 其中 P 为初等矩阵, 则初等矩阵 $P=$ $\underline{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$.

21. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 正整数 $n\geq 2$, 则 $A^n-2A^{n-1}=$ $\underline{\quad 0 \quad}$.

22. 设方阵 A 满足 $A^2-A-3E=0$, 其中 E 为单位矩阵, 则 $(A+E)^{-1}=$ $\underline{\quad A-2E \quad}$.

23. 设方阵 A 满足 $A^2+A-5E=0$, 其中 E 为单位矩阵, 则 $(A-E)^{-1}=$ $\underline{\quad \frac{1}{3}(A+2E) \quad}$.

24. 设 A 是四阶方阵, B 是五阶方阵, 且 $|A|=2, |B|=-2$ 那么 $|-|A|B|=$ $\underline{\quad 64 \quad}$.

25. 已知矩阵方程 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} X=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, 求矩阵 X.

解. 由条件可得:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 3 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 5 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & -15 & -23 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 6 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 5 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & -15 & -23 \\ 0 & 0 & 1 & 19 & 29 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -14 & -19 \\ 0 & 1 & 0 & -15 & -23 \\ 0 & 0 & 1 & 19 & 29 \end{pmatrix}.$$

故 $X=\begin{pmatrix} -14 & -19 \\ -15 & -23 \\ 19 & 29 \end{pmatrix}$.

参考答案: $X=\begin{pmatrix} -14 & -19 \\ -15 & -23 \\ 19 & 29 \end{pmatrix}$.

26. 设 $D=\begin{pmatrix}3&2&1\\3&1&5\\3&2&3\end{pmatrix}$, 求 D^{-1}.

解. 由条件易得

$$\begin{pmatrix}3&2&1&1&0&0\\3&1&5&0&1&0\\3&2&3&0&0&1\end{pmatrix}\longrightarrow\cdots\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&7/6&2/3&-3/2\\0&1&0&-1&-1&2\\0&0&1&-1/2&0&1/2\end{pmatrix}$$

故

$$D^{-1}=\begin{pmatrix}7/6&2/3&-3/2\\-1&-1&2\\-1/2&0&1/2\end{pmatrix}$$

参考答案: $D^{-1}=\begin{pmatrix}7/6&2/3&-3/2\\-1&-1&2\\-1/2&0&1/2\end{pmatrix}$.

27. 求矩阵 X, 使 $AX=B$, 其中 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&5\\3&1\\4&3\end{pmatrix}$.

解. 由条件易得:

$$(A\ B)=\begin{pmatrix}1&2&3&2&5\\2&2&1&3&1\\3&4&3&4&3\end{pmatrix}\rightarrow\cdots\cdots\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&3&2\\0&1&0&-2&-3\\0&0&1&1&3\end{pmatrix}$$

故 $X=A^{-1}B=\begin{pmatrix}3&2\\-2&-3\\1&3\end{pmatrix}$.

参考答案: $X=A^{-1}B=\begin{pmatrix}3&2\\-2&-3\\1&3\end{pmatrix}$.

28. 已知 $X\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&2&2\\0&-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&-1\\4&0&-1\end{pmatrix}$, 求矩阵 X.

解. 因为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} X^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, 于是

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \to \dots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} & 2 \\ 4 & \frac{3}{2} & 7 \end{pmatrix}$$

参考答案： $X = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} & 2 \\ 4 & \frac{3}{2} & 7 \end{pmatrix}$

29. 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 9 & 11 \\ 0 & 1 & -5 & -3 \\ 2 & 6 & -21 & -4 \\ -1 & -3 & 11 & 2 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

解. $(A|E) \to \left(E|A^{-1}\right)$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & -31 & -4 & -16 \\ 3 & 13 & 5 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

参考答案： $A^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & -31 & -4 & -16 \\ 3 & 13 & 5 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

30. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 6 \\ 1 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ 满足 $AX + E = X + A^3$, 求矩阵 X .

解. 由条件易得

$$(A-E)X = A^3 - E$$

由于

$$A - E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 6 \\ 1 & 6 & 0 \end{pmatrix}, \ |A-E| = -1,$$

知 $A-E$ 可逆. 故

$$X=(A-E)^{-1}\left(A^3-E\right)=A^2+A+E=\begin{pmatrix}4&6&3\\6&43&24\\3&24&40\end{pmatrix}$$

参考答案: $X=\begin{pmatrix}4&6&3\\6&43&24\\3&24&40\end{pmatrix}$.

31. 已知 $A=(2,1,3)$, $B=(2,4,-3)$, 设 $X=A^TB$, 求 X^4.

解. 由条件易得

$$BA^T=(2,4,-3)\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}=-1, A^TB=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}(2,4,-3)=\begin{pmatrix}4&8&-6\\2&4&-3\\6&12&-9\end{pmatrix},$$

所以

$$X^4=\left(A^TB\right)\left(A^TB\right)\left(A^TB\right)\left(A^TB\right)=A\left(BA^T\right)^3B=\begin{pmatrix}-4&-8&6\\-2&-4&3\\-6&-12&9\end{pmatrix}.$$

参考答案: $X^4=\begin{pmatrix}-4&-8&6\\-2&-4&3\\-6&-12&9\end{pmatrix}$.

32. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}3&0&1\\1&1&0\\0&1&4\end{pmatrix}$ 满足 $AB=A+2B$, 求矩阵 B.

解. 由于 $AB=A+2B$, 所以 $(A-2E)B=A$, 又

$$(A-2E\,|\,A)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&3&0&1\\1&-1&0&1&1&0\\0&1&2&0&1&4\end{array}\right)\to\cdots\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&5&-2&-2\\0&1&0&4&-3&-2\\0&0&1&-2&2&3\end{array}\right)$$

所以 $B=\begin{pmatrix}5&-2&-2\\4&-3&-2\\-2&2&3\end{pmatrix}$

参考答案: $B=\begin{pmatrix}5&-2&-2\\4&-3&-2\\-2&2&3\end{pmatrix}$.

33. 已知 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&-1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&2&-1\end{pmatrix}$，求 $(AB)^T-A^TB^T$

解. 由于

$$AB-BA=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&-1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&2&-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\2&-1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}3&3&1\\0&-1&0\\1&2&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&1&1\\4&1&2\\5&-2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2&0\\-4&-2&-2\\-4&4&0\end{pmatrix}$$

故

$$(AB)^T-A^TB^T=(AB-BA)^T=\begin{pmatrix}2&-4&-4\\2&-2&4\\0&-2&0\end{pmatrix}$$

.

参考答案：$(AB)^T-A^TB^T=\begin{pmatrix}2&-4&-4\\2&-2&4\\0&-2&0\end{pmatrix}$.

34. 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&1\\5&3\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1&3\\2&0\\3&1\end{pmatrix}$，求矩阵 X，使得 $AXB=C$.

解. 因为

$$|A|=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{vmatrix}=2\neq 0,\ |B|=\begin{vmatrix}2&1\\5&3\end{vmatrix}=1\neq 0,$$

所以 A,B 都可逆，且 $X=A^{-1}CB^{-1}$，又

$$A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&6&-4\\-3&-6&5\\2&2&-2\end{pmatrix},\ B^{-1}=\begin{pmatrix}3&-1\\-5&2\end{pmatrix}$$

所以

$$X=A^{-1}CB^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&6&-4\\-3&-6&5\\2&2&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3\\2&0\\3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-1\\-5&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&1\\10&-4\\-10&4\end{pmatrix}.$$

参考答案： $X=A^{-1}CB^{-1}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 10 & -4\\ -10 & 4\end{pmatrix}$.

35. 设 A 为 n 阶非零实矩阵, $A^*=A^T$, 共中 A^* 是**A**的伴随矩阵，证明: A 可逆.

解. 因为$A^*=A^T$,所以$a_{ij}=A_{ij}$ $(i,j=1,2,\ldots,n)$. 因为A为n阶非零实矩阵，不妨设$a_{11}\neq 0$, 于是

$$|A|=a_{11}A_{11}+a_{11}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{in}=a_{11}^2+a_{12}^2+\cdots+a_{1n}^2>0.$$

参考答案：由$|A|>0$易得.

36. 设 n 阶方阵 A 、 B 及 $A+B$ 均可逆, 证明 $A^{-1}+B^{-1}$ 也可逆, 并求其逆矩阵.

解. 因 A 、 B 及 $A+B$ 均可逆, 有

$$AA^{-1}=A^{-1}A=E,\ BB^{-1}=B^{-1}B=E.$$

于是,

$$A^{-1}+B^{-1}=A^{-1}BB^{-1}+A^{-1}AB^{-1}=A^{-1}(B+A)B^{-1}.$$

即 $A^{-1}+B^{-1}$ 可表示为三个可逆矩阵的乘积, 故 $A^{-1}+B^{-1}$ 可逆. 由可逆矩阵的性质, 有

$$\left(A^{-1}+B^{-1}\right)^{-1}=\left[A^{-1}(A+B)B^{-1}\right]^{-1}=B(A+B)^{-1}A.$$

参考答案： $\left(A^{-1}+B^{-1}\right)^{-1}=\left[A^{-1}(A+B)B^{-1}\right]^{-1}=B(A+B)^{-1}A.$

37. 设 A 、 B 均为 n 阶可逆矩阵 $(n\geq 2)$, 证明: $(AB)^*=B^*A^*$. （其中 A^* 、 B^* 及 $(AB)^*$ 分别为 A 、 B 与 AB 的伴随矩阵）

解. 易知

$$A^*A=|A|E,B^*B=|B|E,(AB)^*(AB)=|AB|E,$$

因为 A 、 B 均可逆，所以 AB 也可逆, 于是

$$A^*=|A|A^{-1},B^*=|B|B^{-1},|AB|=|A|\cdot|B|,$$

故 $(AB)^*=|AB|(AB)^{-1}=|A|\cdot|B|B^{-1}A^{-1}=\left(|B|B^{-1}\right)\left(|A|A^{-1}\right)=B^*A^*$

参考答案：略.

38. 设 n 阶方阵 A 满足 $A^3-A^2+2A-E=O$, 证明 A 及 $E-A$ 均可逆, 并求 A^{-1} 和 $(E-A)^{-1}$.

解. 由 $A^3-A^2+2A-E=O$ 得

$$A\left(A^2-A+2E\right)=E,$$

故 A 可逆，且

$$A^{-1}=A^2-A+2E,$$

又由 $A^3-A^2+2A-E=O$ 得 $(E-A)\left(A^2+2E\right)=E$, 故 $E-A$ 可逆，且

$$(E-A)^{-1}=A^2+2E.$$

参考答案： $A^{-1}=A^2-A+2E, (E-A)^{-1}=A^2+2E.$

39. 设 A,B 为同阶方阵, 则 $|A+B|=|A|+|B|$. .... [×]

40. 设 A,B 为同阶对称矩阵, 则 AB 也是对称矩阵. .... [×]

41. 设矩阵 A,B 的乘积 $AB=E$, 则 $BA=E$. .... [×]

第四章　线性方程组理论

1. 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 与向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 可以相互线性表示，并且 $r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=r_1, r\left(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t\right)=r_2, r\left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t\right)=r_3$,则 (**A**) .

   (A) $r_1=r_2=r_3$　**(B)** $r_1=r_2<r_3$　**(C)** $r_1+r_2=r_3$　**(D)** $r_1+r_2<r_3$

2. 设 **3** 元非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的两个解为 $\xi=(1,0,2)^T,\eta=(1,-1,3)^T$, 且系数矩阵 A 的秩 $r(A)=2$, 则对于任意常数 k,k_1,k_2, 方程组的通解可表示为 (**C**) .

   (A) $k_1(1,0,2)^T+k_2(1,-1,3)^T$　**(B)** $(1,0,2)^T+k(1,-1,3)^T$
   (C) $(1,0,2)^T+k(0,1,-1)^T$　**(D)** $(1,0,2)^T+k(2,-1,5)^T$

3. 设 A 是 n 阶方阵，且 A 可逆，则下列叙述不正确的是 (**B**) .

   (A) $|A|\neq 0$,　**(B)** $Ax=0$ 有非零解,
   (C) $r(A)=n$,　**(D)** A 可表示为某些初等矩阵之积

4. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 是一组 n 维向量,其中 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关, 则 (**D**) .

   (A) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 中必有零向量,　**(B)** α_1,α_2 必线性相关,
   (C) α_2,α_3 必线性无关,　**(D)** $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 必线性相关,

5. m 维向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n(n\geq 2)$ 线性相关的充分必要条件是 (**C**) .

   (A) $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 中至少有一个零向量
   (B) $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 中任意两个向量成比例
   (C) $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 中至少有一个向量可由其余的向量线性表示
   (D) $m<n$

6. 已知矩阵 A 的行列式值为3, 以下说法错误的是 (**D**) .

   (A) A 是满秩矩阵　**(B)** A 是方阵　**(C)** A 是可逆矩阵　**(D)** A 的秩为 3

7. 向量组线性无关的充分必要条件是（ D ）.

(A) 向量组中至少有一个部分组（非向量组本身）线性无关
(B) 向量组中的任何一个部分组（非向量组本身）均线性无关
(C) 向量组中至少有一个向量不能由其余的向量线性表示
(D) 向量组中的任何一个向量均不能由其余的向量线性表示

8. 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 与向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 可以相互线性表示, 且 $r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=r_1$, $r\left(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t\right)=r_2$, $r\left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t\right)=r_3$, 则（ A ）.

(A) $r_1=r_2=r_3$　(B) $r_1=r_2<r_3$　(C) $r_1+r_2=r_3$　(D) $r_1+r_2<r_3$

9. 如果 $m\times n$ 非齐次线性方程组 $AX=b$ 有唯一解, 则（ C ）.

(A) $r(A)=m$　(B) $r(A)<m$　(C) $r(A)=n$　(D) $r(A)<n$

10. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 均为 n 维列向量, A 是 $m\times n$ 矩阵，下列选项正确的是（ A ）

(A) 若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关，则 $A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_s$ 线性相关
(B) 若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关，则 $A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_s$ 线性无关
(C) 若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关, 则 $A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_s$ 线性相关
(D) 若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关，则 $A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_s$ 线性无关

11. 设 $A=\left(a_{ij}\right)_{4\times 6}$, $R(A)=2$, 则齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系中所含解向量的个数是（ D ）.

(A) 1　(B) 2　(C) 3　(D) 4

12. 已知向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关, 则下列各结论不正确的是（ C ）.

(A) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 都不是零向量
(B) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 中任意两个向量的对应分量不成比例
(C) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 中至少有一个向量可由其余向量线性表示
(D) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 中任一部分组线性无关

13. 若 A、B 为 5 阶方阵，线性方程组 $Ax=0$ 仅有零解，且 $r(B)=3$, 则 $r(AB)=$___3___.

14. 设向量 $\alpha_1=(1,2,3)$, $\alpha_2=(4,5,6)$, $\alpha_3=(3,3,3)$ 与向量组 β_1,β_2,β_3 等价, 则 β_1,β_2,β_3 的秩为___2___.

15. 设 A 为 3×3 矩阵, 已知非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的增广矩阵 $\widetilde{A}=(A\ b)$ 经初等行变换化为 $\widetilde{A}\to\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & -1\\ 0 & 2 & -1 & 2\\ 0 & 0 & a(a-1) & a\end{pmatrix}$, 若此方程组无解, 则 a 的取值为___1___.

16. 设 A 为 4×5 矩阵, η_1,η_2 是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解析, 则 $r(A)=$____3____.

17. 设向量组 $\alpha_1=(1,2,1)$, $\alpha_2=(2,3,1)$, $\alpha_3=(a,b,0)$ 线性相关, 则实数 a,b 满足的关系式为 __$a-b=0$__.

18. 设 A 是 n 阶方阵, 且 $r(A)=n-1$, 若 A 中每行元素之和均为 $\mathbf{0}$, 则齐次线性方程组 $Ax=0$ 的通解为 __$c(1,1,\cdots,1)^T$, 其中 c 为任意实数__.

19. 设 A 是秩为 **3** 的 5×4 矩阵, $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的三个不同的解, 若 $\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3=(2,0,0,0)^T, 3\alpha_1+\alpha_2=(2,4,6,8)^T$, 则非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的通解是 __$(1/2,0,0,0)^T+c(0,2,3,4)^T$, 其中 c 为任意实数__.

20. 设向量组 $\alpha_1=(1,1,1)$, $\alpha_2=(a,0,b)$, $\alpha_3=(1,2,3)$ 线性相关, 则实数 a,b 满足的关系式为__$a+b=0$__.

21. 设 $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$, 且 $R(A)=n-1$, η_1,η_2 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的两个不同的解, 则对应齐次线性方程组 $Ax=0$ 的通解为__$c(\eta_2-\eta_1), (c\in R)$__.

22. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关, 且 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关, 则 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的秩为 __3__.

23. 设三阶方阵 $A=\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$, 且 $Ax=0$ 的基础解系中含有两个线性无关的解向量, 则 a 与 b 的关系是 __$a=b$__.

24. 设向量组 A: $\alpha_1=(1,2,3,-2)^T, \alpha_2=(1,1,-2,2)^T, \alpha_3=(-2,-3,-1,0)^T, \alpha_4=(0,1,2,1)^T, \alpha_5=(7,8,0,-5)^T$

(1)求向量组的秩;

(2) 求一个最大无关组;

(3)将向量组中的其余向量用所求出的最大无关组线性表示.

解. 将向量组以列排成矩阵，进行初等变换

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & 7 \\ 2 & 1 & -3 & 1 & 8 \\ 3 & -2 & -1 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 1 & -5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & 7 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -6 \\ 0 & -5 & 5 & 2 & -21 \\ 0 & 4 & -4 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -15 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -15 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) $r(A)=3$;

(2) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 是一个最大线性无关组;

(3) $\alpha_3=-\alpha_1-\alpha_2$, $\alpha_5=4\alpha_1+3\alpha_2-3\alpha_4$.

参考答案： **(1)** $r(A)=3$;

(2) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 是一个最大线性无关组;

(3) $\alpha_3=-\alpha_1-\alpha_2$, $\alpha_5=4\alpha_1+3\alpha_2-3\alpha_4$.

25. 已知非齐次线性方程组: $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=7 \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=-2 \\ 5x_1+4x_2-3x_3+3x_4-x_5=12 \\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=a \end{cases}$,

(1) 求当 a 为何值时，方程组无解、有解;

(2) 当方程组有解时，求出一个特解和对应齐次线性方程组的基础解系，并求出通解.

解. 由条件可得

$$\left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 & -2 \\ 5 & 4 & -3 & 3 & -1 & 12 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & a \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & -23 \\ 0 & -1 & -8 & -2 & -6 & -23 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & a \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & 0 & -1 & -1 & -5 & -16 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 23 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a-23 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & 0 & 0 & -1 & -5 & -16 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 6 & 23 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a-23 \end{array}\right)$$

(1) 当 $a \neq 23$ 时, $r(A)=3, \quad r(A,b)=4$, 此时方程组无解;
当 $a=23$ 时, $r(A)=r(A,b)=3<5$, 此时方程组有无穷多解.

(2) 当 $a=23$ 时, 一个特解为 $\xi=\begin{pmatrix} -16 \\ 23 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, 对应齐次线性方程组的基础解系为

$$\eta_1=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \eta_2=\begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

通解: $x=\xi+c_1\eta_1+c_2\eta_2$ (c_1, c_2 为任意实数).

参考答案: **(1)** 当 $a \neq 23$ 时, $r(A)=3, \quad r(A,b)=4$, 此时方程组无解; 当 $a=23$ 时, $r(A)=r(A,b)=3<5$, 此时方程组有无穷多解.

(2) 当 $a=23$ 时, 一个特解为 $\xi=\begin{pmatrix} -16 \\ 23 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, 对应齐次线性方程组的基础解系为

$$\eta_1=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \eta_2=\begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

通解: $x=\xi+c_1\eta_1+c_2\eta_2(c_1,c_2$ 为任意实数).

26. 设 A 是 3 阶方阵, $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 3 维列向量组, $\alpha_1\neq 0$, 满足 $A\alpha_1=2\alpha_1, A\alpha_2=\alpha_1+2\alpha_2, A\alpha_3=\alpha_2+2\alpha_3$. 证明: $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关.

解. 设

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0, \tag{1}$$

则方阵 A 左乘(1)式, 得

$$(2k_1+k_2)\alpha_1+(2k_2+k_3)\alpha_2+2k_3\alpha_3=0. \tag{2}$$

(2)式$-$(1)式$\times 2$ 得,

$$k_2\alpha_1+k_3\alpha_2=0, \tag{3}$$

方阵A左乘(3)式得

$$(2k_2+k_3)\alpha_1+2k_3\alpha_2=0. \tag{4}$$

(4)式$-$(3)式$\times$2 得, $k_3\alpha_1=0$. 因为 $\alpha_1\neq 0$, 所以 $k_3=0$, 将 $k_3=0$ 代入(3)式, 得 $k_2=0$, 将 $k_2=0$ 代入代式， 得 $k_1=0$, 故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关.

参考答案：略.

27. 设向量组 $\alpha_1=(1,t,1,2)^T,\alpha_2=(0,1,1,3)^T,\alpha_3=(1,1,0,-1)^T$, 问 t 取何值时，该向量组的秩为2，且找出此时向量组的一个极大无关组，并将其余向量用此极大无关组线性表示.

解. 以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为列，构造矩阵$A$，再对$A$施以初等行变换，化为最简阶梯型矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\t&1&1\\1&1&0\\2&3&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&0&t-2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

当 $t=2$ 时, $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=2$. α_1,α_2 是向量组的一个极大无关组, $\alpha_3=\alpha_1-\alpha_2$.

参考答案：当 $t=2$ 时, $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=2$. α_1,α_2 是向量组的一个极大无关组, $\alpha_3=\alpha_1-\alpha_2$.

28. 求线性方程组 $\begin{cases}2x_1+x_2-x_3+x_4=1\\4x_1+2x_2-2x_3+x_4=2\\2x_1+x_2-x_3-x_4=1\end{cases}$ 的通解及对应的齐次线性方程组的基础解系.

解. 对增广矩阵进项初等行变换得

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

故方程的通解为：

$$x = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

其中k_1, k_2为任意常数.

对应的齐次线性方程组的基础解系为：

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

参考答案：方程的通解为：

$$x = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

其中k_1, k_2为任意常数.

对应的齐次线性方程组的基础解系为：

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

29. 设向量组：$\alpha_1 = (-2, 1, 0, 3), \alpha_2 = (1, -3, 2, 4), \alpha_3 = (3, 0, 2, -1), \alpha_4 = (0, -1, 4, 9)$.

(1) 求该向量组的秩及一个极大线性无关向量组;

(2) 将其它向量用该极大线性无关向量组表示.

解. 由条件可得

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & -1 & 9 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

于是

(1) $r=3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是一个极大线性无关向量组;

(2) $\alpha_4 = 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4$.

参考答案：**(1)** $r=3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是一个极大线性无关向量组; **(2)** $\alpha_4 = 2\alpha_1+\alpha_2+\alpha_4$.

30. 设线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 6x_3 + x_4 = 3 \\ 3x_1 - x_2 - p x_3 + 15x_4 = 3 \\ x_1 - 5x_2 - 10x_3 + 12x_4 = t \end{cases}$, 当 p, t 取何值时, 方程组无解、有唯一解、有无穷多解; 并在方程组有无穷多解的情况下, 求出其通解.

解. $\widetilde{A} \to \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -p+2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & t+5 \end{array}\right)$

(1) 当$p \neq 2$时, $r(A) = r(\widetilde{A}) = 4$, 方程组有唯一解;

(2) 当 $p=2$ 时, $\widetilde{A} \to \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t-1 \end{array}\right)$

(a) 当 $t \neq 1$ 时, $r(A) = 3 < r(\widetilde{A}) = 4$, 方程组无解;

(b) 当 $t = 1$ 时, $r(A) = r(\widetilde{A}) = 3$, 方程组有无穷多解，且通解为

$$\begin{cases} x_1 = -8 \\ x_2 = 3 - 2c \\ x_3 = c \\ x_4 = 2 \end{cases} \quad (c\text{为任意实数})$$

参考答案:

(1) 当$p \neq 2$时, $r(A) = r(\widetilde{A}) = 4$, 方程组有唯一解;

(2) 当 $p=2$ 时, $\widetilde{A}\to\left(\begin{array}{cccc:c}1&0&0&0&-8\\0&1&2&0&3\\0&0&0&1&2\\0&0&0&0&t-1\end{array}\right)$

(a) 当 $t\neq 1$ 时, $r(A)=3<r(\widetilde{A})=4$, 方程组无解;

(b) 当 $t=1$ 时, $r(A)=r(\widetilde{A})=3$, 方程组有无穷多解，且通解为

$$\begin{cases}x_1=-8\\x_2=3-2c\\x_3=c\\x_4=2\end{cases}\quad (c\text{为任意实数})$$

31. 设向量组: $\alpha_1=(-1,1,-1,3)$, $\alpha_2=(5,-2,8,-9)$, $\alpha_3=(1,1,3,1)$, $\alpha_4=(-1,3,1,7)$

(1) 求该向量组的秩及一个极大线性无关向量组;

(2) 将其余向量用该极大线性无关向量组线性表示.

解. $$\left(\alpha_1^T,\alpha_2^T,\alpha_3^T,\alpha_4^T\right)=\begin{pmatrix}-1&5&1&-1\\1&-2&1&3\\-1&8&3&1\\3&-9&1&7\end{pmatrix}\to\cdots\to\begin{pmatrix}1&0&\frac{7}{3}&\frac{13}{3}\\0&1&\frac{2}{3}&\frac{2}{3}\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

于是

(1) $r=2,\alpha_1,\alpha_2$ 是一个极大线性无关向量组;

(2) $\alpha_3=\frac{7}{3}\alpha_1+\frac{2}{3}\alpha_2$, $\alpha_4=\frac{13}{3}\alpha_1+\frac{2}{3}\alpha_2$.

参考答案: (1) $r=2,\alpha_1,\alpha_2$ 是一个极大线性无关向量组; (2) $\alpha_3=\frac{7}{3}\alpha_1+\frac{2}{3}\alpha_2$, $\alpha_4=\frac{13}{3}\alpha_1+\frac{2}{3}\alpha_2$.

32. 当 a 为何值时, 线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=7\\x_1+2x_2+3x_3+3x_4+7x_5=30\\3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=a\\4x_1+3x_2-4x_3+2x_4-2x_5=5\end{cases}$$

无解或有解; 并在有解的情况下, 求出其通解.

解. 由于

$$\left(\begin{array}{ccccc:c}1&1&1&1&1&7\\1&2&3&3&7&30\\3&2&1&1&-3&a\\4&3&-4&2&-2&5\end{array}\right)\to\cdots\to\left(\begin{array}{ccccc:c}1&0&0&-1&-5&-16\\0&1&0&2&6&23\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&a+2\end{array}\right)$$

当 $a\neq -2$ 时，系数矩阵的秩不等于增广矩阵的秩，方程组无解.

当 $a=-2$ 时，系数矩阵的秩等于增广矩阵的秩，所以，方程组的通解为:

$$\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -16\\ 23\\ 0\\ 0\\ 0 \end{pmatrix}+c_1\begin{pmatrix} 1\\ -2\\ 0\\ 1\\ 0 \end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix} 5\\ -6\\ 0\\ 0\\ 1 \end{pmatrix},(c_1,c_2\in R)$$

参考答案：当 $a\neq -2$ 时，系数矩阵的秩不等于增广矩阵的秩，方程组无解.
当 $a=-2$ 时，系数矩阵的秩等于增广矩阵的秩，所以，方程组的通解为:

$$\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -16\\ 23\\ 0\\ 0\\ 0 \end{pmatrix}+c_1\begin{pmatrix} 1\\ -2\\ 0\\ 1\\ 0 \end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix} 5\\ -6\\ 0\\ 0\\ 1 \end{pmatrix},(c_1,c_2\in R)$$

33. 设向量组: $\alpha_1=(1,2,3,6),\alpha_2=(1,-1,2,4),\alpha_3=(-1,1,-2,-8),\alpha_4=(1,2,3,2)$.

(1) 求该向量组的秩及一个最大线性无关向量组;

(2) 将其余向量表示为该最大线性无关向量组的线性组合.

解. $\left(\alpha_1^T,\alpha_2^T,\alpha_3^T,\alpha_4^T\right)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1\\ 2 & -1 & 1 & 2\\ 3 & 2 & -2 & 3\\ 6 & 4 & -8 & 2 \end{pmatrix}\to\cdots\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(1) $r=3,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是一个最大线性无关向量组

(2) $\alpha_4=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$

参考答案： (1) $r=3,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是一个最大线性无关向量组

(2) $\alpha_4=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$

34. 当 a 为何值时，线性方程组 $\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3+x_4=1\\ x_1+2x_2-x_3+4x_4=2\\ x_1+7x_2-4x_3+11x_4=a \end{cases}$ 无解或有解；并在有解的情况下求出其通解.

解. 由于

$$(A|b)=\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & -1 & 4 & 2\\ 1 & 7 & -4 & 11 & a \end{array}\right)\to\cdots\to\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 & 2\\ 0 & 5 & -3 & 7 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-5 \end{array}\right)$$

当 $a\neq5$ 时，系数矩阵的秩不等于增广矩阵的秩,方程组无解;
当 $a=5$ 时,

$$(A|b)\to\cdots\to\begin{pmatrix}1&0&\frac{1}{5}&\frac{6}{5}&\frac{4}{5}\\0&1&-\frac{3}{5}&\frac{7}{5}&\frac{3}{5}\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

所以,方程组的通解为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{4}{5}\\3\\\frac{3}{5}\\0\\0\end{pmatrix}+c_1\begin{pmatrix}-\frac{1}{5}\\\frac{3}{5}\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-\frac{6}{5}\\-\frac{7}{5}\\0\\1\end{pmatrix}(c_1,c_2\in R)$$

参考答案：当 $a\neq5$ 时，系数矩阵的秩不等于增广矩阵的秩,方程组无解;
当 $a=5$ 时,方程组的通解为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{4}{5}\\3\\\frac{3}{5}\\0\\0\end{pmatrix}+c_1\begin{pmatrix}-\frac{1}{5}\\\frac{3}{5}\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-\frac{6}{5}\\-\frac{7}{5}\\0\\1\end{pmatrix}(c_1,c_2\in R)$$

35. 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&1&1&3\\1&3&0&2&2\\0&1&-1&3&1\\1&1&2&1&5\end{pmatrix}$ 的秩.

解. 由于

$$A=\begin{pmatrix}1&2&1&1&3\\1&3&0&2&2\\0&1&-1&3&1\\1&1&2&1&5\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-r_1]{r_2-r_1}\begin{pmatrix}1&2&1&1&3\\0&1&-1&1&-1\\0&1&-1&3&1\\0&-1&1&0&2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4+r_2]{r_3-r_2}\begin{pmatrix}1&2&1&1&3\\0&1&-1&1&-1\\0&0&0&2&2\\0&0&0&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3\,\mathrm{div}\,2]{r_4-\frac{1}{2}r_3}\begin{pmatrix}1&2&1&1&3\\0&1&-1&1&-1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

故 $r(A)=3$.

参考答案： $r(A)=3$.

36. 已知 $\alpha_1=(1,-1,0,0)$，$\alpha_2=(0,1,1,-1)$，$\alpha_3=(-1,3,2,1)$，$\alpha_4=(-2,6,4,1)$．讨论向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 及向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的线性相关性．

解．因为

$$\left(\alpha_1^T,\alpha_2^T,\alpha_3^T,\alpha_4^T\right)=\begin{pmatrix}1&0&-1&-2\\-1&1&3&6\\0&1&2&4\\0&-1&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1&-2\\0&1&2&2\\0&0&3&5\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

所以 $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=3$，向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关；$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=3$，所以向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关．

参考答案：向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关；向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关．

37. 求齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1+2x_2+x_3-x_4=0,\\3x_1+6x_2-x_3-3x_4=0,\\5x_1+10x_2+x_3-5x_4=0\end{cases}$ 的通解．

解．由于

$$A=\begin{pmatrix}1&2&1&-1\\3&6&-1&-3\\5&10&1&-5\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&2&1&-1\\0&0&-4&0\\0&0&-4&0\end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}1&2&1&-1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&2&0&-1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

故原方程组的通解为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix},\quad (c_1,c_2\in R)$$

参考答案：方程组的通解为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix},\quad (c_1,c_2\in R)$$

38. 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，且 $\beta_1=\alpha_1-\alpha_2,\beta_2=\alpha_2-\alpha_3,\beta_3=\alpha_3-\alpha_1$，问向量组 β_1,β_2,β_3 是线性相关还是线性无关，并证明你的结论．

解. 设 $k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3=0$, 即

$$k_1(\alpha_1-\alpha_2)+k_2(\alpha_2-\alpha_3)+k_3(\alpha_3-\alpha_1)=0,$$

于是

$$(k_1-k_3)\alpha_1+(k_2-k_1)\alpha_2+(k_3-k_2)\alpha_3=0,$$

因为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关, 所以

$$\begin{cases} k_1-k_3=0 \\ k_2-k_1=0 \\ k_3-k_2=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} k_1=1 \\ k_2=1 \\ k_3=1 \end{cases}$$

从而向量组β_1,β_2,β_3是线性相关的.

参考答案：向量组β_1,β_2,β_3是线性相关的.

39. **(1)** 设 n 维向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关, 若 $\beta_k=\alpha_k+t\alpha_4(k=1,2,3)$, 证明：$\beta_1,\beta_2,\beta_3$ 对任意 t 都线性无关.

(2)设 n 维向是 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 满足 $\sum\limits_{k=1}^{4}k\alpha_k=0,\beta_k=\alpha_k+k\lambda_k\xi(k=1,2,3,4)$, 问 $\lambda_k(k=1,2,3,4)$ 满足什么条件时, 对任意 n 维向量 ξ, 向量组 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 总线性相关.

解. **(1)** 设有常数 k_1,k_2,k_3, 使得 $k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3=0$, 带入已知条件得

$$k_1(\alpha_1+t\alpha_4)+k_2(\alpha_2+t\alpha_4)+k_3(\alpha_3+t\alpha_4)=0,$$

整理得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+t\left(\sum_{i=1}^{3}k_i\right)\alpha_4=0.$$

因为已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关, 故上式成立, 当且仅当 $k_1=k_2=k_3=t\sum\limits_{i=1}^{3}k_i=0$, 即当且仅当 $k_1=k_2=k_3=0$, 故对任意 t, β_1,β_2,β_3 线性无关.

(2) 设有不全为零的数k_1,k_2,k_3,k_4, 使得 $k_1\beta_1+k_3\beta_2+k_3\beta_3+k_4\beta_4=0$. 带入已知条件, 得

$$k_1(\alpha_1+1\lambda_1\xi)+k_2(\alpha_2+2\lambda_2\xi)+k_3(\alpha_3+3\lambda_3\xi)+k_4(\alpha_4+4\lambda_4\xi)=0.$$

整理得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+k_4\alpha_4+\left(\sum_{i=1}^{4}ik_i\lambda_i\right)\xi=0$$

因为已知 $\sum\limits_{k=1}^{4}k\alpha_k=0$, 故上式对任意 ξ 成立, 只需取

$$k_1=1,k_2=2,k_3=3,k_4=4,\text{ 且 }\sum_{i=1}^{4}ik_i\lambda_i=0$$

故 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4$ 满足 $\lambda_1+4\lambda_2+9\lambda_3+16\lambda_4=0$ 时,对任意向量 ξ,向量组 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 均线性相关.

参考答案: (1) 略, (2) $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4$ 满足 $\lambda_1+4\lambda_2+9\lambda_3+16\lambda_4=0$ 时,对任意向量 ξ,向量组 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 均线性相关.

40. 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关,且 $\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$. 证明: 若 $k_1\neq 0$,则向量组 β,α_2,α_3 也线性无关.

解. 设 $l_1\beta+l_2\alpha_2+l_3\alpha_3=0$,于是

$$l_1k_1\alpha_1+(l_1k_2+l_2)\alpha_2+(l_1k_3+l_3)\alpha_3=0$$

因为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关,所以

$$l_1k_1=0,\, l_1k_2+l_2=0,\, l_1k_3+l_3=0,$$

而 $k_1\neq 0$,于是 $l_1=l_2=l_3=0$ 故 β,α_2,α_3 也线性无关.

参考答案: 略.

41. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是一组 n 维向量,证明他们线性无关的充要条件是任一 n 维向量都可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表示.

解. 必要性: 若 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 线性无关, 任取一 n 维向量 β,则 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n,\beta$ 线性相关, 故 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 线性表示。
充分性: 若任一 n 维向量可由 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 线性表示, 那么 n 维单位坐标向量 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n$ 可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 线性表示, 于是

$$n=R(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n)\leq R(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)\leq n,$$

即 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 线性无关.

参考答案: 略.

42. 如果 $r(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_t)\leq r(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s)$,则向量 $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_t$ 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$ 线性表示. . . . . [×]

43. 非齐次线性方程组 $Ax=b$ 有无穷多解的充分必要条件是其对应的齐次线性方程组 $Ax=0$ 有非零解. . . . . [×]

第五章　特征值和特征向量

1. 已知 A 是 n 阶可逆矩阵，则与 A 有相同特征值的矩阵是 (**A**)

(A) A^T　　**(B)** A^2　　**(C)** A^{-1}　　**(D)** $A-E$

2. 与矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ 相似的矩阵是 (**A**).

(A) $\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$　　**(B)** $\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$　　**(C)** $\begin{pmatrix}1&1&0\\0&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}$　　**(D)** $\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}$

3. 若3阶矩阵 A 相似于 B，矩阵的特征值分别为**1,2,3**，那么行列式 $|E+B^{-1}|=$ ___**4**___.

4. 设三阶矩阵 A 的三个特征值分别为 $1,2,4$，则 A^{-1} 的特征值依次为 __$1, 1/2, 1/4$__.

5. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&-2&-4\\-2&x&-2\\-4&-2&1\end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix}5&0&0\\0&-4&0\\0&0&y\end{pmatrix}$ 相似, 求 x, y.

解. 矩阵 B 的特征多项式为

$$|\lambda E-B|=\begin{vmatrix}\lambda-5&0&0\\0&\lambda+4&0\\0&0&\lambda-y\end{vmatrix}=(\lambda-5)(\lambda+4)(\lambda-y)$$

$$=\lambda^3-(y+1)\lambda^2+(y-20)\lambda+20y$$

矩阵 A 的特征多项式为

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&2&4\\2&\lambda-x&2\\4&2&\lambda-1\end{vmatrix}=\lambda^3-(x+2)\lambda^2+(2x-23)\lambda+(15x+40)$$

因为相似矩阵有相同的特征多项式, 故上述两个关于 λ 的多项式中对应项

的系数必须相等，于是

$$\begin{cases} x+2=y+1 \\ 2x-23=y-20 \\ 15x+40=20y \end{cases}$$

解得 $x=4, y=5$.

参考答案： $x=4, y=5$.

6. 求矩阵 $A=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量.

解. A 的特征多项式为

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ -4 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix}=-(1+\lambda)(\lambda-2)^2$$

所以 A 的特征值为 $\lambda_1=-1, \lambda_2=\lambda_3=2$. 对于 $\lambda_1=-1$，解方程组 $(A+E)x=0$. 由

$$A+E=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -4 & 1 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得基础解系 $\xi_1=(1,0,1)^T$，所以 $\lambda_1=-1$ 对应的特征向量为

$$k_1\xi_1=k_1(1,0,1)^T\,(k_1\neq 0).$$

对于 $\lambda_2=\lambda_3=2$，解方程组 $(A-2E)x=0$. 由

$$A-2E=\begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得基础解系

$$\xi_2=(0,1,-1)^T, \xi_3=(1,0,4)^T,$$

所以 $\lambda_2=\lambda_3=2$ 对应的特征向量为

$$k_2\xi_2+k_3\xi_3=k_2(0,1,-1)^T+k_3(1,0,4)^T\,(k_2,k_3\text{ 不全为0}).$$

参考答案： $\lambda_1=-1$ 对应的特征向量为

$$k_1\xi_1=k_1(1,0,1)^T\,(k_1\neq 0);$$

$\lambda_2=\lambda_3=2$ 对应的特征向量为

$$k_2\xi_2+k_3\xi_3=k_2(0,1,-1)^T+k_3(1,0,4)^T\,(k_2,k_3\text{ 不全为0}).$$