第二章　行列式　克拉默法则

1. 下列 $n(n>2)$ 阶行列式的值可能不是零的有（　）．

(A) 行列式中的非零元素少于 n 个
(B) 行列式中的每行元素之和均为零
(C) 行列式主对角线上元素均为零
(D) 行列式中有一行元素的余子式均为零

2. 四阶行列式中含负号并且包含元素 a_{23}, a_{31} 的项为（　）．

(A) $a_{12}a_{23}a_{31}a_{44}$　**(B)** $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$　**(C)** $a_{14}a_{23}a_{31}a_{44}$　**(D)** $a_{12}a_{23}a_{31}a_{42}$

3. 设行列式 $\left|a_{ij}\right| = m(i,j=1,2,\cdots,5)$, 将 $\left|a_{ij}\right|$ 的第二列元素乘以 2 后与第三列交换，再转置, 则结果为（　）．

(A) $-2m$　**(B)** $-32m$　**(C)** $32m$　**(D)** $2m$

4. 设 A 为 3×3 矩阵, 且 $|A|=-2$, 把 A 按列分块为 $A=(A_1,A_2,A_3)$, 其中 $A_j(j=1,2,3)$ 为 A 的第 j 列, 则行列式 $|A_3-2A_1,3A_2,A_1|=$（　）．

(A) -6　**(B)** -12　**(C)** 6　**(D)** 12

5. 设矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$, 其中 $\alpha_i(i=1,2,3)$ 是三维列向量，若行列式 $|A|=1$, 则行列式 $|(4\alpha_1,2\alpha_1-3\alpha_2,\alpha_3)|=$（　）．

(A) -24　**(B)** -12　**(C)** 12　**(D)** 24

6. 已知三阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=1$, 则 $\begin{vmatrix} a_{11} & 3a_{11}-2a_{12} & 4a_{13}-a_{11} \\ -3a_{21} & -9a_{21}+6a_{22} & -12a_{23}+a_{21} \\ a_{31} & 3a_{31}-2a_{32} & 4a_{33}-a_{31} \end{vmatrix}=$（　）

(A) 12　**(B)** 24　**(C)** -24　**(D)** -36

7. 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix}$ 中元素 a_{23} 的代数余子式 $A_{23}=$__________．

8. 计算行列式的值: $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$__________.

9. $\begin{vmatrix} 7 & 8 & 9 & x \\ 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 3 & 5 \end{vmatrix}$ 中 x 的系数为__________.

10. 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 7 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \end{vmatrix} =$__________.

11. 已知行列式 $D = \begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & x & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$, 则 D 中 x 的系数是__________.

12. 行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$, 则 $A_{12} + A_{33} =$__________.

13. 行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -4 & 9 & -3 \\ 5 & -15 & 5 \end{vmatrix}$, 则 $M_{31} - M_{32} - M_{33} =$__________.

14. 行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & -5 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ 其中 A_{ij} 是 D 的 (i,j) 元的代数余子式, 求 $A_{31} + 3A_{32} - 2A_{33} + 2A_{34}$

15. 求行列式 $D = \begin{vmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ b & b & a & \dots & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & b & b & \dots & a \end{vmatrix}$ 的值.

16. 用克莱姆法则求线性方程组$\begin{cases} 2x-5y+4z=4 \\ x+y-2z=-3 \\ 5x-2y+7z=22 \end{cases}$ 中 y 的值.

17. 求行列式 $D=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 8 & 1 \\ 1 & -3 & 9 & -6 \\ 0 & 2 & -5 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 6 \end{vmatrix}$ 的值.

18. 求行列式 $D=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ 的值.

19. 求行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$ 的值.

第三章 矩阵的运算

1. 设 A,B 为同阶方阵，且 $|A|=|B|$，则必有（ ）.

(A) $A=B$ **(B)** $A^*=B^*$ **(C)** $A+A^*=B+B^*$ **(D)** $AA^*=BB^*$

2. 设 A,B,C 为同阶方阵，且 $ABC=E$，则 $B^{-1}=$（ ）.

(A) AC **(B)** CA **(C)** $(AC)^{-1}$ **(D)** $(CA)^{-1}$

3. 设 A 为 n 阶矩阵，则在下列矩阵中，为反对称矩阵的是（ ）.

(A) AA^T **(B)** A^TA **(C)** $A+A^T$ **(D)** $A-A^T$

4. 矩阵A、B可以做减法运算的必要条件是（ ）.

(A) 矩阵 A、B 有相同的行数 **(B)** 矩阵 A、B 有相同的列数
(C) 矩阵 A、B 元素的个数相同 **(D)** 拒阵 A、B 为同型矩阵

5. 设 A 为可逆矩阵，则 A^* 的逆矩阵为（ ）.

(A) $|A|^{-1}A$ **(B)** $|A|A$ **(C)** $|A|^{-1}A^{-1}$ **(D)** $|A|A^{-1}$

6. 设 A、B 为 n 阶方阵，且 $AB=0$, $B\neq 0$，则必有（ ）

(A) $A=0$ **(B)** $|A|=0$
(C) $|B|\neq 0$ **(D)** $(A+B)^2=A^2+B^2$

7. 设方阵 A 可逆，且 $AB=BA$，则下列等式未必成立的是（ ）.

(A) $A^2B=BA^2$ **(B)** $A^TB=BA^T$ **(C)** $A^{-1}B=BA^{-1}$ **(D)** $A^*B=BA^*$

8. 设 A 为 n 阶非零矩阵，E 为 n 阶单位矩阵，若 $A^3=0$，则（ ）.

(A) $E-A$ 不可逆，$E+A$ 不可逆 **(B)** $E-A$ 不可逆，$E+A$ 可逆
(C) $E-A$ 可逆，$E+A$ 可逆 **(D)** $E-A$ 可逆，$E+A$ 不可逆

9. 设 A 、 B 均为 n 阶矩阵, 若 $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$ 成立, 则 A 、 B 必须满足 (　　)
.

(A) $A=E$ 或 $B=E$　**(B)** $A=O$ 或 $B=O$　**(C)** $A=B$　**(D)** $AB=BA$

10. 下列矩阵不是初等矩阵的是 (　　).

(A) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$　**(B)** $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　**(C)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　**(D)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

11. 设 A 为 3 阶方阵, A^* 为 A 的伴随矩阵，且 $|A|=\dfrac{1}{2}$, 则行列式 $\left|3A^*-(2A)^{-1}\right|$ 的值是____________.

12. 已知 $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$,　$B=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $AB^T=$____________.

13. 已知 $A=\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, 则 $A^{-1}=$____________.

14. 已知 $A^2-2A-8E=0$, 则 $(A+E)^{-1}=$____________.

15. 设向量 $\alpha=(2,-1)$, 则 $\left(\alpha^T\alpha\right)^{101}=$____________.

16. 设 4 维向量 $\alpha=(3,-1,0,2)$,　$\beta=(3,1,-1,4)$, 若向量 γ 满足 $2\alpha+\gamma=3\beta$, 则 $\gamma=$____________.

17. 设A, B 均为3阶方阵，且 $|A|=4, |B|=2$, 则 $\left|2\left(B^TA^{-1}\right)\right|=$____________.

18. 设 $A=(3,0,1,0)$, $B=\begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 4 \\ 11 \end{pmatrix}$, 则 $(AB)^{2017}=$____________.

19. 设 $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, 则 $(A^*)^{-1}=$____________.

20. 设 $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} a & b & c-2b \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, 且 $AP=B$, 其中 P 为初等矩阵, 则初等矩阵 $P=$__________.

21. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 正整数 $n\geq 2$, 则 $A^n-2A^{n-1}=$__________.

22. 设方阵 A 满足 $A^2-A-3E=0$, 其中 E 为单位矩阵, 则 $(A+E)^{-1}=$__________.

23. 设方阵 A 满足 $A^2+A-5E=0$, 其中 E 为单位矩阵, 则 $(A-E)^{-1}=$__________.

24. 设 A 是四阶方阵, B 是五阶方阵, 且 $|A|=2, |B|=-2$ 那么 $|-|A|B|=$__________.

25. 已知矩阵方程 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}X=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, 求矩阵 X.

26. 设 $D=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, 求 D^{-1}.

27. 求矩阵 X, 使 $AX=B$, 其中 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

28. 已知 $X\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, 求矩阵 X.

29. 求矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 9 & 11 \\ 0 & 1 & -5 & -3 \\ 2 & 6 & -21 & -4 \\ -1 & -3 & 11 & 2 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

30. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 6 \\ 1 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ 满足 $AX+E=X+A^3$, 求矩阵 X .

31. 已知 $A=(2,1,3)$, $B=(2,4,-3)$, 设 $X=A^TB$, 求 X^4.

32. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$满足 $AB=A+2B$, 求矩阵 B .

33. 已知 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, 求 $(AB)^T-A^TB^T$
.

34. 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, 求矩阵 X , 使得 $AXB=C$.

35. 设 A 为 n 阶非零实矩阵, $A^*=A^T$, 共中 A^* 是**A**的伴随矩阵，证明: A 可逆.

36. 设 n 阶方阵 A 、 B 及 $A+B$ 均可逆, 证明 $A^{-1}+B^{-1}$ 也可逆, 并求其逆矩阵.

37. 设 A 、B 均为 n 阶可逆矩阵 $(n\geq 2)$, 证明: $(AB)^*=B^*A^*$. （其中 A^* 、 B^* 及 $(AB)^*$ 分别为 A 、B 与 AB 的伴随矩阵）

38. 设 n 阶方阵 A 满足 $A^3-A^2+2A-E=O$, 证明 A 及 $E-A$ 均可逆, 并求 A^{-1} 和 $(E-A)^{-1}$.

39. 设 A,B 为同阶方阵, 则 $|A+B|=|A|+|B|$. · [ ]
40. 设 A,B 为同阶对称矩阵, 则 AB 也是对称矩阵. · [ ]
41. 设矩阵 A,B 的乘积 $AB=E$, 则 $BA=E$. · [ ]

第四章　线性方程组理论

1. 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 与向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 可以相互线性表示，并且 $r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=r_1, r\left(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t\right)=r_2, r\left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t\right)=r_3$,则 (　　) .

   (A) $r_1=r_2=r_3$　　**(B)** $r_1=r_2<r_3$　　**(C)** $r_1+r_2=r_3$　　**(D)** $r_1+r_2<r_3$

2. 设 3 元非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的两个解为 $\xi=(1,0,2)^T,\eta=(1,-1,3)^T$, 且系数矩阵 A 的秩 $r(A)=2$, 则对于任意常数 k,k_1,k_2, 方程组的通解可表示为 (　　) .

   (A) $k_1(1,0,2)^T+k_2(1,-1,3)^T$　　**(B)** $(1,0,2)^T+k(1,-1,3)^T$
   (C) $(1,0,2)^T+k(0,1,-1)^T$　　**(D)** $(1,0,2)^T+k(2,-1,5)^T$

3. 设 A 是 n 阶方阵，且 A 可逆，则下列叙述不正确的是 (　　) .

   (A) $|A|\neq 0$,　　**(B)** $Ax=0$ 有非零解,
   (C) $r(A)=n$,　　**(D)** A 可表示为某些初等矩阵之积

4. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 是一组 n 维向量,其中 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关, 则 (　　) .

   (A) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 中必有零向量,　　**(B)** α_1,α_2 必线性相关,
   (C) α_2,α_3 必线性无关,　　**(D)** $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 必线性相关,

5. m 维向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n(n\geq 2)$ 线性相关的充分必要条件是 (　　) .

   (A) $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 中至少有一个零向量
   (B) $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 中任意两个向量成比例
   (C) $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 中至少有一个向量可由其余的向量线性表示
   (D) $m<n$

6. 已知矩阵 A 的行列式值为3, 以下说法错误的是 (　　) .

   (A) A 是满秩矩阵　　**(B)** A 是方阵　　**(C)** A 是可逆矩阵　　**(D)** A 的秩为 3

7. 向量组线性无关的充分必要条件是（　）.

(A) 向量组中至少有一个部分组（非向量组本身）线性无关
(B) 向量组中的任何一个部分组（非向量组本身）均线性无关
(C) 向量组中至少有一个向量不能由其余的向量线性表示
(D) 向量组中的任何一个向量均不能由其余的向量线性表示

8. 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 与向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 可以相互线性表示, 且 $r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=r_1$, $r\left(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t\right)=r_2$, $r\left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t\right)=r_3$, 则（　）.

(A) $r_1=r_2=r_3$　　(B) $r_1=r_2<r_3$　　(C) $r_1+r_2=r_3$　　(D) $r_1+r_2<r_3$

9. 如果 $m\times n$ 非齐次线性方程组 $AX=b$ 有唯一解, 则（　）.

(A) $r(A)=m$　　(B) $r(A)<m$　　(C) $r(A)=n$　　(D) $r(A)<n$

10. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 均为 n 维列向量, A 是 $m\times n$ 矩阵，下列选项正确的是（　）

(A) 若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关，则 $A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_s$ 线性相关
(B) 若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关，则 $A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_s$ 线性无关
(C) 若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关, 则 $A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_s$ 线性相关
(D) 若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关，则 $A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_s$ 线性无关

11. 设 $A=\left(a_{ij}\right)_{4\times 6}$, $R(A)=2$, 则齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系中所含解向量的个数是（　）.

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

12. 已知向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关, 则下列各结论不正确的是（　）.

(A) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 都不是零向量
(B) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 中任意两个向量的对应分量不成比例
(C) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 中至少有一个向量可由其余向量线性表示
(D) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 中任一部分组线性无关

13. 若 A、B 为 5 阶方阵，线性方程组 $Ax=0$ 仅有零解，且 $r(B)=3$, 则 $r(AB)=$__________.

14. 设向量 $\alpha_1=(1,2,3)$, $\alpha_2=(4,5,6)$, $\alpha_3=(3,3,3)$ 与向量组 β_1,β_2,β_3 等价, 则 β_1,β_2,β_3 的秩为__________.

15. 设 A 为 3×3 矩阵, 已知非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的增广矩阵 $\tilde{A}=(A\ b)$ 经初等行变换化为 $\tilde{A}\to\begin{pmatrix}1&-2&3&-1\\0&2&-1&2\\0&0&a(a-1)&a\end{pmatrix}$, 若此方程组无解, 则 a 的取值为__________.

16. 设 A 为 4×5 矩阵, η_1,η_2 是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解析, 则 $r(A)=$____________.

17. 设向量组 $\alpha_1=(1,2,1),\ \alpha_2=(2,3,1),\ \alpha_3=(a,b,0)$ 线性相关, 则实数 a,b 满足的关系式为 ____________.

18. 设 A 是 n 阶方阵, 且 $r(A)=n-1$, 若 A 中每行元素之和均为 **0**, 则齐次线性方程组 $Ax=0$ 的通解为 ____________.

19. 设 A 是秩为 **3** 的 5×4 矩阵, $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的三个不同的解, 若 $\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3=(2,0,0,0)^T, 3\alpha_1+\alpha_2=(2,4,6,8)^T$, 则非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的通解是 ____________.

20. 设向量组 $\alpha_1=(1,1,1),\quad \alpha_2=(a,0,b),\quad \alpha_3=(1,2,3)$ 线性相关, 则实数 a,b 满足的关系式为____________.

21. 设 $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$, 且 $R(A)=n-1,\quad \eta_1,\eta_2$ 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的两个不同的解, 则对应齐次线性方程组 $Ax=0$ 的通解为____________.

22. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关, 且 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关, 则 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的秩为 ____________.

23. 设三阶方阵 $A=\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$, 且 $Ax=0$ 的基础解系中含有两个线性无关的解向量, 则 a 与 b 的关系是 ____________.

24. 设向量组 A: $\alpha_1=(1,2,3,-2)^T, \alpha_2=(1,1,-2,2)^T, \alpha_3=(-2,-3,-1,0)^T, \alpha_4=(0,1,2,1)^T, \alpha_5=(7,8,0,-5)^T$

(1)求向量组的秩;

(2) 求一个最大无关组;

(3)将向量组中的其余向量用所求出的最大无关组线性表示.

25. 已知非齐次线性方程组: $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=7 \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=-2 \\ 5x_1+4x_2-3x_3+3x_4-x_5=12 \\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=a \end{cases}$,

(1) 求当 a 为何值时，方程组无解、有解;

(2) 当方程组有解时，求出一个特解和对应齐次线性方程组的基础解系，并求出通解.

26. 设 A 是 3 阶方阵, $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 3 维列向量组, $\alpha_1\neq 0$, 满足 $A\alpha_1=2\alpha_1, A\alpha_2=\alpha_1+2\alpha_2, A\alpha_3=\alpha_2+2\alpha_3$. 证明: $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关.

27. 设向量组 $\alpha_1=(1,t,1,2)^T,\alpha_2=(0,1,1,3)^T,\alpha_3=(1,1,0,-1)^T$, 问 t 取何值时，该向量组的秩为2，且找出此时向量组的一个极大无关组，并将其余向量用此极大无关组线性表示.

28. 求线性方程组 $\begin{cases}2x_1+x_2-x_3+x_4=1\\4x_1+2x_2-2x_3+x_4=2\\2x_1+x_2-x_3-x_4=1\end{cases}$ 的通解及对应的齐次线性方程组的基础解系.

29. 设向量组： $\alpha_1=(-2,1,0,3)$, $\alpha_2=(1,-3,2,4)$, $\alpha_3=(3,0,2,-1)$, $\alpha_4=(0,-1,4,9)$.
(1) 求该向量组的秩及一个极大线性无关向量组;
(2) 将其它向量用该极大线性无关向量组表示.

30. 设线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+2x_3+3x_4=1\\x_1+3x_2+6x_3+x_4=3\\3x_1-x_2-px_3+15x_4=3\\x_1-5x_2-10x_3+12x_4=t\end{cases}$, 当 p,t 取何值时, 方程组无解、有唯一解、有无穷多解; 并在方程组有无穷多解的情况下, 求出其通解.

31. 设向量组: $\alpha_1=(-1,1,-1,3)$, $\alpha_2=(5,-2,8,-9)$, $\alpha_3=(1,1,3,1)$, $\alpha_4=(-1,3,1,7)$
(1) 求该向量组的秩及一个极大线性无关向量组;
(2) 将其余向量用该极大线性无关向量组线性表示.

32. 当 a 为何值时, 线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=7\\x_1+2x_2+3x_3+3x_4+7x_5=30\\3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=a\\4x_1+3x_2-4x_3+2x_4-2x_5=5\end{cases}$$

无解或有解; 并在有解的情况下, 求出其通解.

33. 设向量组: $\alpha_1=(1,2,3,6),\alpha_2=(1,-1,2,4),\alpha_3=(-1,1,-2,-8),\alpha_4=(1,2,3,2)$.
(1) 求该向量组的秩及一个最大线性无关向量组;
(2) 将其余向量表示为该最大线性无关向量组的线性组合.

34. 当 a 为何值时，线性方程组 $\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3+x_4=1 \\ x_1+2x_2-x_3+4x_4=2 \\ x_1+7x_2-4x_3+11x_4=a \end{cases}$ 无解或有解; 并在有解的情况下求出其通解.

35. 求矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ 的秩.

36. 已知 $\alpha_1=(1,-1,0,0)$, $\alpha_2=(0,1,1,-1)$, $\alpha_3=(-1,3,2,1)$, $\alpha_4=(-2,6,4,1)$. 讨论向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 及向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的线性相关性.

37. 求齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3-x_4=0, \\ 3x_1+6x_2-x_3-3x_4=0, \\ 5x_1+10x_2+x_3-5x_4=0 \end{cases}$ 的通解.

38. 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关, 且 $\beta_1=\alpha_1-\alpha_2,\beta_2=\alpha_2-\alpha_3,\beta_3=\alpha_3-\alpha_1$, 问向量组 β_1,β_2,β_3 是线性相关还是线性无关，并证明你的结论.

39. **(1)** 设 n 维向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关, 若 $\beta_k=\alpha_k+t\alpha_4(k=1,2,3)$, 证明：$\beta_1,\beta_2,\beta_3$ 对任意 t 都线性无关.

(2)设 n 维向是 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 满足 $\sum\limits_{k=1}^{4} k\alpha_k=0,\beta_k=\alpha_k+k\lambda_k\xi(k=1,2,3,4)$, 问 $\lambda_k(k=1,2,3,4)$ 满足什么条件时, 对任意 n 维向量 ξ, 向量组 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 总线性相关.

40. 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关, 且 $\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$. 证明：若 $k_1\neq 0$, 则向量组 β,α_2,α_3 也线性无关.

41. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是一组 n 维向量, 证明他们线性无关的充要条件是任一 n 维向量都可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表示.

42. 如果 $r(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_t)\le r(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s)$, 则向量 $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_t$ 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$ 线性表示.…………………………………………………………[ ]

43. 非齐次线性方程组 $Ax=b$ 有无穷多解的充分必要条件是其对应的齐次线性方程组 $Ax=0$ 有非零解.……………………………………………………[ ]

第五章　特征值和特征向量

1. 已知 A 是 n 阶可逆矩阵，则与 A 有相同特征值的矩阵是 (　　)

(A) A^T　　**(B)** A^2　　**(C)** A^{-1}　　**(D)** $A-E$

2. 与矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ 相似的矩阵是 (　　).

(A) $\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$　　**(B)** $\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$　　**(C)** $\begin{pmatrix}1&1&0\\0&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}$　　**(D)** $\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}$

3. 若3阶矩阵 A 相似于 B，矩阵的特征值分别为**1,2,3**，那么行列式 $|E+B^{-1}|=$ ____________.

4. 设三阶矩阵 A 的三个特征值分别为 $1,2,4$,则 A^{-1} 的特征值依次为 ____________.

5. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&-2&-4\\-2&x&-2\\-4&-2&1\end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix}5&0&0\\0&-4&0\\0&0&y\end{pmatrix}$ 相似, 求 x,y .

6. 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}-2&1&1\\0&2&0\\-4&1&3\end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量.